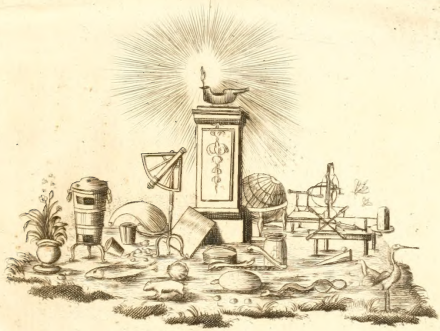
FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXXI.

PARS PRIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXIV.

116.70295 April 28

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXXI. Janvier —— Juin.

avec trois planches de figures.

VOYAGES *académiques* - - - - Pag. 3.

MORT - - - - - - - - - 8.

Précis de la vie & des ouvrages de M. Jean Antoine Güldenſtädt - - - - - 9.

METEOROLOGIE.

Lettre de l'Académie Electorale des Sciences de Manheim - - - - - 17.

Pag.

Hyver de 1780 *à* 1781 - - - 19.
Extraits des obſervations météorologiques faites en divers endroits de la Ruſſie - - - 24.

MACHINES.

Rapport & éclairciſſemens ſur un Cabeſtan de nouvelle conſtruction: de l'invention de M. Eckhard, *à l'uſage de la marine* - - - - 38.

OUVRAGES, *Machines & Inventions préſentées ou communiquées à l'Académie, pendant le cours du premier Sémeſtre de l'Année* 1781 49.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

ad Annum MDCCLXXXI. Pars prior.

Cum tabulis XI. aeri inciſis.

MATHEMATICA Pag.

LEONH. EVLER. *Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales, ſine ſubſidio quantitatum imaginariarum* - - - 3.

—— —— *De duplici geneſi tam epicycloidum quam hypocycloidum* - - - - - 48.

—— —— *De curvis rectificabilibus in ſuperficie coni recti ducendis* - - - - 60.

LE-

V.

Pag.

LEONH. EVLER. *De mirabilibus proprietatibus vnciarum, quae in euolutione binomii ad potestatem quamcunque euecti occurrunt* - - 74.

ANDR. IOH. LEXELL. *Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum* - - 112.

NICOLAVS FVSS. *Disquisitio Analytico-geometrica de variis speciebus linearum curuarum singulari proprietate praeditarum* - - - 127.

STEPH. RVMOVSKI. *Methodus inuestigandi integrale aequationis*
$dp(1-p)(nn-ss)+ds(nn+p^3+ps+pps)=0$ - 147.

PHYSICO-MATHEMATICA

LEONH. EVLER. *De oscillationibus minimis funis libere suspensi* - - - - - 157.

—— —— *De perturbatione motus chordarum ab earum pondere oriunda* - - - - 178.

STEPH. RVMOVSKI. *Methodus exactior declinationem acus magneticae obseruandi* - - 191.

ANDR. IOH. LEXELL. *Solutio problematis mechanici* - - - - 196.

PHYSICA

CASP. FRIEDR. WOLFF. *De ordine fibrarum muscularium cordis. Dissertatio secunda: De textu cartilagineo cordis; siue de filis cartilagineo-osseis eorumque in basi cordis distributione* - - - - 211.

Pag.

J. G. GEORGI. *Examen chemicum adipis porcinae. Pars altera.* - - - - - 238.

J. T. KOELREVTER. *Verbasca noua hybrida* - 249.

BASIL. ZOUIEW. *Anarrichas pantherinus. Ruſſis* Кусачка, сука - - - 271.

P. S. PALLAS. *Felis manul, noua ſpecies aſiatica* 278.

JOAN. LEPECHIN. *Iris Güldenſtaedtiana* - 292.

ASTRONOMICA

LEONH. EVLER. *De perturbatione motus planetarum et cometarum* - - - 297.

JACQ. ANDRÉ MALLET. *Obſervations & calculs de la Comète de* 1779 - - - 341.

A. J. LEXELL. *Solution d'une queſtion aſtronomique* 351.

PETR. INOCHODZOW. *Breuiarium obſeruationum aſtronomicarum pro determinando ſitu geographico celebris vrbis atque portus Cherſoni anno* 1782 *inſtitutarum* - - 367.

—— —— *Obſeruationes aſtronomicae pro ſtabilienda poſitione vrbis Charkow anno* 1783 *inſtitutae* 375.

CORRIGENDA.

Loco pag. 289. 230. 235. 292. 293. 233. 296. lege
273. 274. 275. 276. 277. 278. 280.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXXI.
Janvier —— Juin.

M. le Chambellan *de Domaſchnef*, Directeur de l'Académie avoit, pendant le cours de ce ſemeſtre, formé divers projets de voyages académiques: deux en ont été exécutés et ont eu quelque ſuccès: nous allons les rapporter en omettant tous les détails qui ne ſauroient intereſſer nos lecteurs.

M. *de Domaſchnef* préſenta d'abord à SA MAJESTÉ L'IMPÉRATRICE le Projet de trois nouvelles expéditions aſtronomiques, deſtinées à déterminer la poſition géographique de pluſieurs lieux importans de l'Empire. Ce projet avoit déja été dreſſé en 1778 par un comité compoſé d'Académiciens, que le Directeur avoit nommé & conſulté ſur les moyens de perfectionner les cartes géographiques de la Ruſſie.

Si tôt que l'Auguſte Protectrice des Sciences & des Arts eut pris connoiſſance de ce projet utile & important, Elle le ſignat: Sa munificence aſſigna en même temps une ſomme d'argent conſiderable pour ſubvenir aux frais de cette entrepriſe. L'Académie en fut informée vers le milieu du mois de Mars, & elle reçut avec la plus reſpectueuſe reconnoiſſance cette nouvelle marque de la bienfaiſance diſtinguée dont SA MAJESTÉ l'honore.

Mais il ſe préſenta d'abord un grand inconvénient dans l'execution de ce projet: quelque bon qu'il auroit été en 1778, où il a été conçu, il ſe trouva, qu'il ſeroit presqu' inutile de le ſuivre en 1781 & 1782, vû que la trop petite élevation de la Planète Jupiter, ſurtout dans les provinces boréales de la Ruſſie, le défaut des eclipſes du Soleil & de la Lune & le trop petit nombre d'occultations des étoiles fixes par la Lune, rendroient le voyage des Aſtronomes abſolument infructueux: il falloit ou abandonner entièrement l'entrepriſe pour le préſent & la remettre à deux ou trois ans, ou ne ſuivre ce projet approuvé qu'en partie, en n'envoyant d'abord qu'un ſeul Aſtronome dans les provinces les plus méridionales de l'Empire, où Jupiter malgré la grande déclinaiſon auſtrale conſerve encore aſſés d'élévation pour permettre à l'Obſervateur de ſaiſir avec préciſion les momens des immerſions & émerſions de ſes ſatellites.

L'Académie crut ne devoir pas différer de ſe conformer à la volonté de ſa grande Protectrice & elle eut recours au dernier expédient: elle arrêta en conſequence que M. le Prof. *Inohodzof* avec le Géodéſiſte *Tſchernoi* partiroient

roient inceſſamment vers le Sud: qu'ils ſe rendroient d'abord à Orel, enſuite à Negin & de là à Loubny, pour déterminer la longitude des ces trois villes par un nombre ſuffiſant d'obſervations: que de cette maniere ils n'arriveroient à Cherſon, qui étoit l'endroit le plus méridional de leur expédition, qu'en 1782; où ils s'arrêteroient pour en déterminer la longitude, jusqu'à ce que la diminution de la Déclinaiſon auſtrale de Jupiter les mettroit en état de ſe rapprocher du Nord, en retournant par Charkov, Koursk, Tanbow et Kalouga, dont ils détermineroient la poſition.

Ce nouveau Plan fut approuvé: l'Académie donna à M. *Inohodſof* une inſtruction formelle & lui fournit tous les inſtrumens dont il eut beſoin: enfin l'Académicien partit avec ſon aide encore avant la fin du mois de Mai, muni des ordres Impériaux pour tous les Gouvernemens par leſquels il fut obligé de paſſer. Il envoya déja en Septembre les obſervations qu'il avoit faites à Orel, & s'appercevant qu'il pouvoit très-bien ſe paſſer d'un aide, l'Académie rappella ſur ſa repréſentation le Géodéſiſte Tſchernoi, qui reprit ſes fonctions au Département géographique.

Presqu'en même temps partit auſſi M. l'Adjoint *Zouyef* que M. *de Domaſchnef* avoit engagé à viſiter les provinces méridionales de l'Empire & à aller jusqu'à Cherſon. Ce voyage ſe fit aux fraix de l'Académie, & M. *Zouyef* reçut une Inſtruction détaillée relative aux obſervations d'hiſtoire naturelle & de phyſique, dont il fut principalement chargé: Quoique cette inſtruction fut reſtreinte

ſtreinte aux états de la Ruſſie: il ſe préſentèrent dans la ſuite quelques occaſions favorables, dont M. *Zouyef* profita, pour faire une excurſion en Crimée & un tour de Cherſon à Conſtantinople.

Le Chan Souverain de la Crimée ayant demandé un Minéralogue expert qui ſe rendroit auprès de lui & lui apprendroit à déterrer & à exploiter les tréſors cachés dans ſes états; le choix tomba ſur M. l'Adjoint *Moiſeenkof* & SA MAJESTÉ L'IMPÉRATRICE voulut bien y donner Son conſentement. M. *Moiſeenkof* fut en conſequence expédié aux dépens du Chan, & l'Académie crut devoir en profiter: elle le chargea de ſes commiſſions & lui donna une inſtruction, dans laquelle lui furent indiqués les principaux objets de ſon attention & de ſes recherches. M. *Moiſeenkof* partit, mais il ne parvint que jusqu'à Moscou: là il fut attaqué d'une maladie violente & mourut.

M. le Prof. *Pallas* avoit obtenu la permiſſion d'accompagner S. E. Mr. le Comte *Alexandre de Stroganof* dans un voyage que celui-ci ſe propoſoit de faire à ſes terres en Sibérie: Il pouvoit dans cette courſe rendre des ſervices importans à l'Académie & ramaſſer pour ſon Cabinet d'hiſtoire naturelle, tout ce qu'il trouveroit le mériter. Le Directeur écrivit dans cette vûe au Collège Impérial des mines & le pria de vouloir bien ordonner aux prépoſes des minieres & fonderies que M. *Pallas* aura occaſion de viſiter dans ſon voyage, qu'ils lui accordaſſent tous les ſecours qu'il leur demanderoit. M. *Pallas* partit avec le Comte *Stroganof* pendant les vacances de la moiſſon:

ſon: mais étant arrivé à Moscou il ſentit ſa ſanté ébranlée par le mauvais temps & les fatigues du voyage: il fut donc obligé de ſe ſéparer du Comte, de rétablir ſa ſanté & de retourner à St. Pétersbourg, où il revint au commencement du Septembre.

M. *de Domaſchnef* fit lui-même deux abſences: la première au commencement de l'année n'étoit que de ſix ſemaines, & l'Académie eut ordre de s'adreſſer pendant cet intervalle à ſon Honoraire M. le Comte *Alexandre de Stroganof*, Sénateur, Conſeiller-privé & Chevalier de pluſieurs ordres, que SA MAJESTÉ avoit nommé pour recevoir de l'Académie les ouvrages & rapports qui doivent Lui être préſentés.

L'autre abſence étoit de plus longue durée: M. *de Domaſchnef* demanda & obtint de SA MAJESTÉ L'IMPERATRICE la permiſſion de faire un voyage à Cherſon: il partit à la fin du mois de Mai, & après avoir fait un tour en Crimée, il revint à St. Pétersbourg vers la fin du mois de Novembre. L'Académie s'adreſſa encore pendant cette abſence à ſes Honoraires, Mr. le Comte *de Stroganof*, & après le départ de celui-ci, à M. le Grand-Chambellan, Conſeiller privé actuel & Chevalier de *Schouvalof*.

M.

M. *Eric Laxmann*, Professeur en Economie & Chymie, ayant quitté l'Académie pour se rendre à *Nerschinsk* & y occuper une place de Conseiller de la Chancellerie des Mines, avec le rang de Conseiller de Cour, son nom a été transporté dans la Liste des Associés externes.

Mais une perte réelle que l'Académie a faite au commencement de cette année, c'est la mort de M. *Güldenstädt*, un de ses plus dignes membres. Quoiqu'enlevé à la fleur de son âge, il avoit si bien mis à profit les années de sa carrière, que sa mémoire mérite d'être transmise à la postérité.

Précis de la vie & des ouvrages de Monſieur *Jean Antoine Güldenſtädt.*

Jean Antoine Güldenſtädt, Docteur en Médecine, Profeſſeur d'Hiſtoire naturelle & Membre de diverſes Sociétés ſavantes, naquit à Riga le 26 d'Avril 1745. Son pere *Antoine Güldenſtädt* étoit Secrétaire du grand Conſiſtoire Impérial & enſuite Aſſeſſeur de la Cour de Juſtice à Riga. Sa mere *Dorothée* étoit fille unique de *Jaques de Virgin*, Bourguemaître à Pernau.

Le jeune *Güldenſtädt* reçut les premières inſtructions de ſon pere, qui étoit également capable de lui former l'eſprit & le coeur. Il fit de ſi grands progrès, qu'au bout de peu d'années il fut en état d'entrer en premiere au Lycée de Riga. Le Recteur & Paſteur défunt Loder lui enſeigna les langues & d'autres connoiſſances utiles avec beaucoup de ſuccès. En 1758, n'ayant pas encore treize ans accomplis, il perdit ſon pere & fut abandonné à lui même. La mère ſuivit ſon époux en 1761 & le jeune *Güldenſtädt* fut dans la même année déclaré majeur à ſeize ans. Il vint en Juillet 1763 à Berlin & y fut

bientôt après reçu au nombre des étudians du Collège de Medecine. Il eut le bonheur d'y trouver les guides les plus habiles en Mrs. *Mutzel*, *Gleditsch* & *Gerhard*. Ayant puisé dans ces sources, il se rendit à Francfort sur l'Oder pour y étendre ses connoissances & fut jugé digne de recevoir le degré en Docteur en Médecine dans sa 22e année, le 31 Décembre 1767. La Société des Curieux de la nature de la même ville l'avoit aggrege au nombre de ses membres le 5 du même mois.

Presque aussitôt après il se présenta pour lui une conjoncture des plus favorables. SA MAJESTÉ L'IMPÉRATRICE DE RUSSIE ordonna qu'on fit choix de Savans propres à parcourir les Provinces de Son vaste Empire pour y faire des observations & des découvertes qui eussent principalement pour objet l'Histoire naturelle. L'Académie Impériale des Sciences, instruite des talens du jeune Médecin, l'invita à être un de ces doctes Missionnaires. M. *Güldenstädt* se rendit à cette invitation & arriva à St. Pétersbourg en Avril 1768. D'abord il fut destiné à visiter le Gouvernement d'Astrachan; mais diverses circonstances apporterent du changement à ce plan. Vers le milieu de Juin de la même année il se mit en route avec le caractère d'Adjoint de l'Académie; il s'arrêta à Moscou jusqu'en Mars 1769, & de là, continuant sa route par Woronesch, Zaritzin & Astrachan, il parvint à la forteresse de Kislar, frontière de la Russie sur le fleuve Térek, après avoir souffert en voyage des froids extraordinaires pour la saison & le climat. De là en suivant les bords du fleuve susdit & de ceux qui portent les noms de Kunbelei, de Sounscha, d'Aksai & de Koisa, il examina divers

bains

bains chauds & des ſources de naphte, qui offroient des objets remarquables, & il viſita le côté Nord-Eſt des monts Caucaſes. En Février 1771, il vint dans l'Oſſetie, diſtrict des Alpes Caucaſiennes, où il s'occupa entr'autres choſes de l'hiſtoire ancienne des peuples de ces contrées & compoſa des vocabulaires mizdſchegéſique & oſſetique: ce qui lui fit découvrir des traces anciennes de Chriſtianisme.

Pendant ce temps-là il fut déclaré le 8 Avril membre ordinaire de l'Académie Impériale & Profeſſeur d'Hiſtoire naturelle. En Mai il retourna aux bains chauds ſitués ſur le Térek, & trouva moyen de joindre aux obſervations chymiques qu'il avoit déja faites ſur ces bains, des eſſais pratiques dont le ſuccès répondit parfaitement à ſon attente. En Juillet & en Août il eut des occaſions très-favorables de s'initier aux connoiſſances politiques & phyſiques du petit Kabarda & du diſtrict Nord-Oueſt du Caucaſe, habité par les Dugones. Le Tauſultan Arslanbeg, l'un des Princes les plus conſidérables du Kabarda, & ſon couſin Dewletuqua Kelemet le conduiſirent eux-mêmes de lieu en lieu. Il arriva enfin, au mois de Septembre en Géorgie & il y eut le 15 Octobre une audience ſolemnelle du Tsar Héraclius, qui lui fit l'accueil le plus gracieux; & dans la ſuite, après quelques ſervices qu'il avoit rendus comme Médecin à la famille de ce Prince, il en reçut les ſecours les plus propres à le faire parvenir au but principal de ſon voyage. Il ſuivit même Héraclius dans l'expédition militaire qu'il fit au-delà du fleuve Kur, ce qui le conduiſit le 14 Novembre à Teflis, capitale de la Géorgie, ville mal bâtie & encore plus

mal ſaine. Il y ſéjourna livré principalement à des recherches phyſiques, juſqu'au 15 Février 1772; après quoi il alla avec Héraclius en Kachetie, où il s'arreta pendant tout le mois de Mars. En Mai il parcourut le Provinces Turcomanniques ou Terekmentziques, ſituées au midi de Teflis, accompagné de l'Eriſtaw David, un des principaux & des plus puiſſans ſeigneurs de la Géorgie, qu'il avoit guéri d'une maladie. En Juin il vit encore une partie des Alpes Caucaſiennes & entra le 7 Juillet dans le territoire de Salomon, Tsar d'Imerétte, qui ſur l'annonce de ſon arrivée, avoit envoyé au-devant de lui ſon fils unique, le Tsarevitſch Alexandre, agé de dix ans; enſuite il lui donna audience à Sechartali au ſommet des Alpes Caucaſiennes mitoyennes, où il tenoit ſa cour en été. Enſuite M. *Güldenſtädt* traverſa le diſtrict de Radſcha, la baſſe Imerétte, les confins de la Mingrélie & de la Gourie, la partie orientale de l'Imerétte, & la moyenne Géorgie. Enfin après avoir eſſuyé pluſieurs dangers, dans des chemins où les voyageurs ſont journellement expoſés, & evité en particulier celui de tomber entre les mains d'un Corps de 300 Oſſetins qui le guettoient ſur les bords du Térek, il en rapporta des decouvertes intéreſſantes relatives à l'hiſtoire naturelle & à celle de pluſieurs peuples ſur leſquels on n'avoit encore eu que les connoiſſances les plus vagues & les plus incertaines. En Novembre il ſe rendit à Mosdoc & delà à Kislar. Il paſſa l'hyver à completter les notices qui pouvoient encore être imparfaites ſur les Nations du Caucaſe, & particulièrement ſur les Légiens.

Le

Le désordre de sa santé l'obligea d'aller en Avril 1773 aux bains nommés Petersbad. En Juin il accompagna un Usden ou Noble Kabardin, à la suite du Prince de la même nation *Kuryok Tatarchanow*, sur la route en delà de la Malke, & visita le grand Kabarda; d'où il tourna vers le Kuma oriental & les montagnes Beschtau, qui forment la partie antérieure la plus élevée du Caucase; il fouilla dans les ruines de Madschar, le long du fleuve Kuma, où l'on trouve des monumens qui viennent plutôt des Mahométans que des Madschares ou Hongrois; en Juillet il étoit à Tscherkask sur le Don. Il fit de là un espece de digression jusqu'à Asow pour voir les diverses embouchures du Don & les côtes voisines de la mer d'Asow; ce qui le conduisit en Novembre à Krementschuk, capitale du Gouvernement de la nouvelle Russie, où il passa l'hyver, & employa une partie de l'été suivant de 1774 à divers voyages dans ce Gouvernement. Il venoit de se mettre en chemin pour la Crimee, lorsque le 20 Juillet il fut rappellé par un ordre Impérial, auquel il obeit en repassant par Krementschuk, & en suivant les frontieres de l'Ukraine, d'où il fit un tour à Bachmut, puis par Kiew & Serpuchov il vint le 20 Décembre à Moscou; & le 2 Mars 1775 il arriva heureusement avec sa suite & ses effets à St. Pétersbourg.

Pendant ses voyages en 1770 la Société libre économique de St. Pétersbourg l'avoit reçu au nombre de ses associés: celle des amis scrutateurs de la nature de Berlin en avoit fait autant en 1774, & depuis en 1779 il fut encore aggregé à la Société Electorale de Mayence. Depuis son retour ses principales occupations furent de met-

tre en ordre ſes propres mémoires & d'en faire autant par rapport au Journal du feu Prof. *Gmelin*, qui avoit fait un voyage ſemblable au ſien. À l'exception de quelques déſcriptions & pieces détachées inſérées dans les Collections de l'Académie Impériale des Sciences, dans ſes Almanachs & dans le Journal de St. Pétersbourg, M. *Güldenſtädt* n'avoit encore rien publié de ſon voyage; mais ſes manuſcripts exiſtent; ils ont été confiés à ſon ſavant confrère le célébre Prof. *Pallas* & le monde tant ſavant que politique ne tardera pas de jouir du fruit de ſes travaux. Mr. *Güldenſtädt* avoit envoyé ſucceſſivement à l'Académie les plus intéreſſantes de ſes remarques, accompagnées de Cartes & de Deſſins, le tout en bon ordre & pour la plus grande partie en état d'être publié: il ne s'agit que de rédiger les Obſervations ſcientifiques; & à cet égard on ſe conformera réligieuſement à ſes vües, ſur leſquelles il s'étoit ſouvent & ſuffiſamment expliqué.

Les écrits qui lui avoient déja acquis beaucoup de réputation, ſont les ſuivans:

Diſſertatio de theoria virium corporis humani primitivarum. Thèſe inaugurale ſoutenue à Francfort ſur l'Ordre en 1767.

Mémoire ſur les produits de Ruſſie propres pour ſoutenir la balance du commerce extérieur toujours favorable. À St. Pétersbourg 1777. Discours lu dans l'aſſemblée publique pour le Jubilé de l'Académie; on y trouve des preuves convainquantes de l'étendue des connoiſſances ſtatiſtiques de l'Auteur par rapport à l'Empire de Ruſſie. Ce Diſcours a été traduit en allemand & en ruſſe.

Ab-

Abhandlung von den Häfen am Aſowſchen, ſchwarzen und weiſſen Meere. Inſérée dans le Journal de St. Pétersbourg & traduite en ruſſe dans l'Almanach historique & géographique de 1776.

Abhandlung von den Häfen am Kaſpiſchen Meere avec une Carte: auſſi dans le Journal ſusdit & en ruſſe dans l'Almanach de 1777.

Geographiſche, chymiſche und mediciniſche Beſchreibung der im Aſtrachaniſchen Gouvernement am Terek Fluſſe gelegenen warmen Bäder: traduite en ruſſe & inſérée dans l'Almanach de 1778.

Geographiſche, hiſtoriſche und ſtatiſtiſche Nachrichten von der neuen Grenzlinie des Ruſſiſchen Reichs zwiſchen dem Terek Fluſſe und dem Aſowiſchen Meere; avec une Carte. Dans l'Almanach de 1779.

Gedanken über eine zwiſchen Ruſsland und Deutſchland auf der Donau und dem ſchwarzen Meere zu eröfnende Handlung: à l'Occaſion de la préſence de l'Empereur JOSEPH II. lorsque S. M. daigna honorer l'Académie de ſa viſite: inſéré de même que les mémoires précédens dans le Journal de St. Pétersbourg.

Beſchreibung des Desman oder der Biſamratze. Dans les mémoires de la ſocieté des amis ſcrutateurs de la Nature à Berlin.

Outre pluſieurs Déſcriptions inſérées dans les Commentaires & les Actes de l'Academie Impériale des Sciences.

En

En 1780, la Societé économique libre lui conféra la Préſidence qu'il garda jusqu'à ſa mort.

M. *Güldenſtädt* practiquoit la Médecine avec autant de plaiſir que de ſuccès, & il poſſédoit à un haut degré toutes les qualités d'un bon médecin: il avoit autant de douceur que de fermeté, une expérience ſuffiſante & un coeur ſenſible: mais ce ſont auſſi ces excellentes qualités qui nous l'ont arraché. Il régnoit une fievre maligne dans quelques maiſons de ſa connoiſſance, dont il venoit de guérir ſept malades, lorsqu'il en fut attaqué lui-même. Il ſuccomba enfin à la violence du mal, le 23 Mars 1781, dans ſa 36e année, univerſellement regretté. On a vu combien il le méritoit par ſon ſavoir; il en étoit encore plus digne par ſes vertus.

MÉ-

MÉTÉOROLOGIE.

Lettre de l'Académie Electorale des Sciences de Manheim à l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Academiae Imp. Scientiarum Petropolitanae

Academia Elect. Theodoro-Palatina felicitatem.

A Sereniſſimo Principe Electore noſtro inſtitutam nuper eſſe Academiae huius ſuae claſſem novam, meteorologicam nempe, quae inſtrumenta harmonica ad colligendas obſeruationes, inter ſe facile comparabiles, per omnes terrae partes mittit, ex adiuncto hisce litteris monito, Viri ampliſſimi, perſpicietis. Ad ſtudii & laboris noſtri ſocietatem cum iam iam Vos eſſemus inuitaturi, acceptas a Cl. *Eulero* veſtro litteras Aſtronomus Elect. *Chriſtianus Mayerus* nobiscum communicauit, ex quibus Vos de inſtituto hoc, ad publicam vtilitatem tam luculenter ſpectante edoctos, amicas nobis manus offerre, eumque in finem ampliorem rei expoſitionem petere, laeti intellexi-mus. Vnde enim plus opis quam a Collegio Scientiarum laude primario expectemus? Obſeruationum noſtrarum genus et modus, quae penitius noſſe cupitis, in eo, quod ſupra diximus, monito, prolixe exponuntur. Cum

 autem,

autem, quae inſtituti noſtri ratio eſt, de inſtrumentorum harmonia potiſſimum agatur, ea, quae Sereniſſimi fundatoris noſtri iuſſu ſumtibusque diſtribuimus, vna cum breui eius modi, quo confecta ſunt, deſcriptione quamprimum vobis mittemus, abſolutiorem deſcriptionem ad ephemeridum noſtrarum meteorologicarum volumen primum iuxta moniti paragraphum XVIII reſervantes.

Poterit illuſtriſſima Academia imperialis, ſi ita ei viſum fuerit, inſtrumenta ad hoc exemplum paranda, ac delectis Imperii Ruſſici locis collocanda curare. An collectas inde obſeruationes ſingulari opere ipſa quotannis edere, aut nobiscum communicare velit, vt vna cum noſtris in lucem prodeant, hoc ſapientiae eius et ſtudio, relinquimus. Vt vero, quae inſtrumentis noſtris Petropoli inſtitutae fuerint, obſeruationes annuatim nobis mittantur, id enixe rogamus. His ſi aliae quaedam, de quibus in monito (§. 5. 9. 10. 13) ſermo eſt, adiungerentur, res fieret nobis multo gratiſſima.

Si quid porro erit, Viri praeſtantiſſimi, quod a nobis deſideretis, ad id omne promtos nos ſemper paratosque habebitis. Valete.

Dedimus Manhemii III. idus Ianuarii 1781.

L. B. de Hohenhauſen,

Stengel.

Hemmer.

Hyver

Hyver de 1780 à 1781, ſuivant le nouveau ſtile.

1.

Il neigea pour la premiere fois le 26 Septembre 1780, & pour la derniere fois le 25 Mai 1781. L'intervalle entre ces deux termes eſt de 241 jours.

2. Il géla pour la premiere fois le 27 Septembre 1780: Therm. 152$^{d.}$, Barom. 28. 12, ciel ſerein, Vent N-E: & pour la derniere fois le 11 Mai 1781: Therm. 152$^{d.}$, Barom. 28. 40, ciel ſerein, Vent N-Ou. Cet intervalle entre la premiere & la derniere gélée eſt de 226 jours.

3. La Néva fut priſe pendant 155 jours; depuis le 21 Novembre où elle ſe couvrit des glaces du Ladoga par un froid de 166$^{d.}$, jusqu'au 25 Avril de grand matin, où elle débacla par une temperature de 150$^{d.}$. Les Glaçons du Lac Ladoga parurent le 2 Mai, & la riviere les charia le 3, 7, 8, 9, 10, 12, 14 & 15 Mai.

4. Depuis le 27 Septembre jusqu'au 11 Mai ſuivant, le plus grand froid n'a été obſervé que de 186$^{d.}$,

le 1er Janvier à 10 heures du soir: Barom. 28. 02, ciel serein, vent de Nord. Le moindre froid à midi a été de 129^d.^ le 1er Mai après midi: Barom. 28. 53, ciel serein & calme; ce qui donne une variation totale de 57 degrés de Delisle.

5. Le froid moyen au matin & au soir a été trouvé

depuis le 27 Septembre jusqu'au 11 Mai - - - 160^d.^
depuis le 1 Octobre jusqu'au 1 Juin - - - 158.
depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai - - - 162.

Le froid moyen à midi

depuis le 27 Septembre jusqu'au 11 Mai - - 152^d.^
depuis le 1 Octobre jusqu'au 1 Juin - - - 150.
depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai - - - 155.

6. Le froid au matin & au soir a été

12 jours entre 180 & 190^d.^ en Decembre, Janvier & Février (*)
34 jours entre 170 & 180^d.^ en Décem., Janv. & Avril (**)
52 jours entre 160 & 170 en Novembre — — Avril
78 jours entre 150 & 160 en Septembre — — Mai
41 jours entre 140 & 150 en Octobre — — Mai
9 jours entre 130 & 140 en Octobre.

7.

(*) le 11. 12 Déc. le 1 14. 16. 18. 19. 22. 23. 25 Janv. & le 21. 22 Février.

(**) le 9 12 — 15. 23. 26 Déc. le 2 5. 9 10. 13. 15 17. 20 24 Janv. le 3. 5. 6. 8 — 11. 20. 23. 24. 26 Févr. le 10. 11. 12. 21, 23. 28 Mars & le 3 Avril.

7. Le froid à midi a été observé

1 jour entre 130 & 120$^{d.}$ le 1 Mai
33 jours entre 140 & 130 en Octobre, Avril & Mai (*)
70 jours entre 150 & 140 en Septembre — — Mai
65 jours entre 160 & 150 en Novembre — — Mai
38 jours entre 170 & 160 en Novembre — — Mars
18 jours entre 180 & 170 en Décembre, Janvier, Février
1 jour entre 190 & 180 le 16 Janvier.

8. L'état du Baromètre depuis le 1er Octobre jusqu'au 1er Juin suivant.

La plus grande élévation 28. 87 le 21 Février vers midi. Therm. 174, ciel serein, vent du N-E.

La plus petite élévation 27. 12 le 2 Octobre à 3 heures après midi. Therm. 136, ciel couvert, pluïe & vent du Sud très fort.

La variation totale - - 1. 75 ou 1 $\frac{3}{4}$ pouces

Le milieu - - - - - 28. 00

La hauteur moyenne - 28. 04 c. à. d. 28 $\frac{1}{25}$ pouces de Paris.

La hauteur du Baromètre pendant ces 8 mois ou 243 jours d'hyver s'eſt trouvé 157 jours au deſſus de 27 $\frac{8}{10}$; 135 jours au deſſus de 28, & 109 jours au deſſus de 28 $\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9. Les vents forts pendant ce même intervalle de temps ont soufflé:

(*) le 1. 2. 12. 13. 16 — 27 29 Octobre, le 9. 12. 13. 21 — 24. 27. 30 Avril & le 2. 3. 4. 6. 9 Mai.

6 jours du *Nord* le 8 Nov. le 12 Déc. le 20. 21 Mars le 1 Avril & le 10 Mai

3 jours du N-E le 11 Déc. le 9. 18 Févr.

2 jours de *l'Eſt* le 6. 7 Oct.

8 jours du S-E le 10. 11 Oct. le 5 Nov. le 17 Janv. le 11. 12. 19. 24 Févr.

8 jours du *Sud* le 30 Oct. le 6 Nov. le 2 Janv. le 10. 13. 15. 16. 17 Févr.

16 jours du S-Ou. le 3. 4. 13. 18. 31 Oct. le 26 Nov. le 1. 16. 18. 29 Déc., le 8. 30. 31 Janv., le 5. 25 Mars & le 10 Avril.

18 jours de *l'Oueſt* le 19. 24 Oct., le 12 Nov., le 2. 17. 19. 27 Déc., le 20. 23. 27 Janv., le 6 Févr., le 4. 13. 29. 30 Mars & le 5. 9. 30 Mai.

16 jours du N-Ou. le 3. 9. 21 Déc., le 11 Janv., le 14. 16. 17. 18. 19. 31 Mars, & le 11. 21. 22. 23. 27. 28 Mai.

10. Les vents très forts ſont venus

1 jour du *Nord* le 1 Févr.

3 jours de *l'Eſt* le 19 Janv. & le 27. 28 Mars

2 jours du S-E le 26. 28 Janv.

5 jours du *Sud* le 2. 20 Octobre, le 14 Février, le 15 Avril & le 31 Mai

4 jours du S-Ou. le 28 Déc., le 29 Janv. & le 13. 14 Avril.

4 jours de *l'Oueſt* le 7. 21 Janvier & le 9. 17 Avril.

2 jours du N-Ou le 20 Déc. & le 16 Avril.

11. Les

11. Les autres variations de l'Atmoſphère depuis le 1er Octobre jusqu'au 1er Juin ſuivant, ſont annotées dans la table ci-jointe:

Atmoſphère.	Oct.	Nov	Déc	Janv.	Fév.	Mars	Avr.	Mai	Somme
jours entierement ſereins	5	6	8	8	2	6	14	11	60 jours
jours entierement couverts	15	21	11	17	12	9	4	5	94 ——
Brouillards	4	2	2	5	9	1	4	4	31 ——
Pluie médiocre	13	5	1	3	0	0	5	5	32 } 43 —
Pluie abondante	6	2	0	0	0	0	1	2	11 }
Neige médiocre	3	12	11	9	10	10	6	4	65 } 75 —
Neige abondante	0	2	1	4	0	3	0	0	10 }
Quantité de l'eau de pluïe & de neige en pouces depuis le 12 jusqu'au 12	2,57	0,94	0,86	0,97	0,46	0,44	0,71	0,84	7,79 pouces
Aurores boreales	3	2	2	3	1	6	7	0	24 jours
Vents forts	12	5	13	9	12	14	2	10	77 ——
Vents très forts	2	0	2	6	2	2	6	1	21 ——

Extrait

Extrait des Obſervations météorologiques

Année 1780. Octobre		St. Pétersbourg
	Latitude - -	59°. 56′. 23″
	Différence des méridiens -	0ʰ. 0′. 0′
I. Baromètre.	La plus grande élévation	28. 65. le 18
	La plus petite élévation	27. 34. le 9
	La variation totale - -	1. 31
	Le milieu - - -	28. 00
	La hauteur moyenne - -	28. 03
II Thermomètre.		Delisle Reaumur.
	Le plus grand froid - -	155 — 2. 7
	le	23 & 30 matin
	Le moindre froid - -	132 + 9. 6
	le	8. ſoir
	Froid moyen de la nuit	146 + 2. 1
	Froid moyen à midi - -	138 + 6. 4
III. Vent.	Vent fort - - - le	9. S
	Vent très fort - - le	
	Direction des Vents N	4 jours
	NE	2
	E	5
	SE	3
	S	3
	SOu	4
	Ou	5
	NOu	5
IV. Atmoſphère.	Ciel entierement ſerein -	5 jours
	Ciel entierement couvert	17
	Brouillard - - -	3
	Pluye - - - -	16
	Neige - - - -	4

faites

faites en divers endroits suivant le vieux Stile.

Moscou.		Astrachan.		Irkoutzk.	
55°. 45′. 20″		46°. 21′. 13″		52°. 18′. 15″	
0ʰ. 28′. 41″.	Est	1ʰ. 10′. 51″.	Est	4ʰ. 56′. 44″.	Est
28. 27. le 18 & 19		28. 42 le 1 & 28		27. 60 le 4	
27. 27. le 31		28. 00 le 3		26. 40 le 7	
1. 00		0. 42		1. 20	
27. 77		28. 21		27. 00	
27. 77		28. 27		27. 05	
Délisle	Reaumur.	Délisle	Reaumur.	Délisle	Reaumur.
156	− 3. 2	149	− 0. 5	187	− 19. 7
21 matin		19 matin		28 matin	
131	+ 10. 1	120	+ 16. 0	131	+ 10. 1
9 à midi		2 & 3 midi		1 midi	
145	+ 2. 8	141	+ 4. 9	166	− 8. 7
141	+ 4. 7	129	+ 10. 9	152	− 1. 0
9 SW		—		13 NW	
28 SW		—		26 NW	
0 jours		2 jours		4 jours	
3 —		5 —		5 —	
2 —		3 —		3 —	
6 —		10 —		6 —	
1 —		8 —		1 —	
11 —		1 —		0 —	
5 —		5 —		1 —	
3 —		2 —		11 —	
6 jours		21 jours		15 jours	
22 —		0 —		9 —	
7 —		5 —		0 —	
8 —		1 —		0 —	
1 —		0 —		6 —	

Extrait des observations météorologiques

Année 1780. Novembre.		St. Pétersbourg.
I. Baromètre.	La plus grande élevation	28. 53 le 13
	La plus petite élévation	27. 35 le 28
	La variation totale - -	1. 18
	Le milieu - - -	27. 94
	La hauteur moyenne - -	27. 98

		Delisle	Reaumeur.
II. Thermomètre.	Le plus grand froid - -	182	— 17. 1
	le	30 avant midi	
	Le moindre froid - -	146	+ 2. 1
	le	17 à midi	
	Froid moyen de la nuit	160	— 5. 3
	Froid moyen après midi	156	— 3. 2

III. Vent.	Vent fort - - - -	9 jours
	Vent très fort - - le	— —
	Directions des Vents N	6 jours
	NE	1 —
	E	5 —
	SE	3 —
	S	2 —
	SOu	4 —
	Ou	5 —
	NOu	4 —

IV. Atmosphère.	Ciel entierement serein	6 jours
	Ciel entierement couvert	17 —
	Brouillard - - - -	1 —
	Pluie - - - -	5 —
	Neige - - - -	16 —
		La Néva fut prise le 13.

faites

faites en divers endroits suivant le vieux Stile

Moscou		Astrachan.		Irkoutzk.	
28. 31 le 17		28. 96 le 17		27. 60 le 19 & 20	
26. 72 le 29		27. 84 le 1		26. 80 le 4. 16 & 30	
1. 59		1. 12		0. 80	
27. 51		28. 40		27. 20	
27. 68		28. 34		27. 10	
Délisle	Reaumur.	Délisle	Reaumur.	Délisle	Reaumur.
184	— 18. 1	167	— 9. 0	209	— 31. 5
30 matin		29 soir		19 matin	
146	+ 2. 1	130	+ 11. 0	150	0
3 avant midi		1, 4, 11 & 15 après midi		6 après midi	
159	— 4. 3	148	+ 1. 1	181	— 16. 5
156	— 3. 2	141	+ 4. 8	168	— 9. 6
8 jours		12 jours			
29. SE		16 E, 17 SE, 4. 24 SOu., 29 Ou.		NB. Le rapport n'en fait pas mention	
4 jours		1 jour		4 jours	
1 —		1 —		8 —	
2 —		3 jours		4 —	
4 —		8 —		3 —	
0 —		1 jour		1 jour	
0 —		7 jours		0 —	
9 —		6 —		0 —	
10 —		3 —		10 jours	
4 jours		8 jours		11 jours	
25 —		8 —		9 —	
6 —		5 —		Le rapp. n'en dit rien	
2 —		5 —		0 jour	
16 —		3 —		8 jours	
La Mosqua fut prise le 7		La Wolga fut prise le 29			

Extrait des observations météorologiques

Année 1780. Décembre		St. Pétersbourg.
I. Baromètre.	La plus grande élévation	28. 83 le 30
	La plus petite élévation	27. 46 le 19
	La variation totale - -	1. 37
	Le milieu - - - -	28. 14
	La hauteur moyenne -	28. 24
II. Thermomètre.		Déliſle Réaumur.
	Le plus grand froid - -	186 — 19. 2
	le	21 au ſoir
	Le moindre froid - -	148 + 1. 1
	le	18 matin
	Froid moyen de la nuit	165° — 8. 0
	Froid moyen après midi	159 — 4. 8
III. Vent.	Vent fort - - - -	11 jours
	Vent très fort - - le	9 NOu, 17 SOu, 27 Ou
	Direction des Vents - N	7 jours
	NE	1 —
	E	3 —
	SE	1 jour
	S	2 jours
	SOu	5 —
	Ou	5 —
	NOu	7 —
IV. Atmoſphère.	Ciel entierement ſerein -	5 jours
	Ciel entierement couvert	17 —
	Brouillard - - -	2 —
	Pluie - - - - -	0 —
	Neige - - - -	14 —

faites

faites en divers endroits suivant le vieux Stile.

Moscou.	Astrachan.	Irkoutzk.
28. 44 le 30	29. 10 le 28	27. 90 le 26
27. 06 le 20	28. 17 le 20 & 21	26. 50 le 9
1. 38	0. 93	1. 40
27. 75	28. 64	27. 20
27. 83	28. 66	27. 21
Délisle Reaumur.	Délisle Reaumur.	Délisle Reaumur.
198 — 25. 6	187 — 20	204 — 28. 8
3 au soir	16 matin	27 matin
152 — 1. 1	130 — 0	153 — 1. 6
10 à midi	13,14&20. après md.	5 après midi
168 — 9. 4	169 — 10. 1	184 — 18. 0
165 — 8. 0	163 — 7. 1	168 — 9. 8
9 jours	17 jours	
10NOu.18Ou.23SOu	4NE,15NOu,26.27E	
1 jour	1 jour	2 jours
1 —	7 jours	11 —
3 jours	5 —	6 —
1 jour	4 —	6 —
2 jours	1 jour	1 jour
5 —	4 jours	0 —
11 —	5 —	0 —
7 —	4 —	5 jours
4 jours	11 jours	15 jours
26 —	7 —	6 —
0 —	3 —	— —
0 —	0 jour	0 jour
9 —	3 —	5 jours

Extrait des obſervations météorologiques

Anno 1781.	Janvier.	St. Pétersbourg.	
I. Baromètre.	La plus grande élévation	28. 77	le 3
	La plus petite élévation	27. 24	le 20
	La variation totale - -	1. 53	
	Le milieu - - -	28. 00	
	La hauteur moyenne - -	27. 97	
II. Thermomètre.		Delisle	Reaumur.
	Le plus grand froid - -	185	— 18. 7
	le	12 matin	
	Le moindre froid - -	146	+ 2. 1
	le	19 après midi	
	Froid moyen de la nuit	171	— 11. 2
	Froid moyen après midi	164	— 7. 5
III. Vent.	Vent fort - - -	9 jours	
	Vent très fort - - le	8 E., 15. 17. 18 SE., 10 Ou., 21 NOu.	
	Direction des Vents - N	5 jours	
	NE	3 —	
	E	3 —	
	SE	4 —	
	S	2 —	
	SOu	4 —	
	Ou	6 —	
	NOu	4 —	
IV. Atmoſphère	Ciel entierement ſerein -	6 jours	
	Ciel entierement couvert	12 —	
	Brouillard - - -	8 —	
	Pluie - - - -	3 —	
	Neige - - - -	11 —	

faites

faites en divers endroits suivant le vieux Stile.

Moscou.		Astrachan.		Irkoutzk.	
28. 11 le 3 & 4		28. 66 le 1 & 31		28. 05 le 29	
27. 17 le 27		28. 17 le 14		26. 95 le 25	
0. 94		0. 49		1. 10	
27. 64		28. 42		27. 50	
27. 65		28. 44		27. 37	
Délisle	Reaumur.	Délisle	Reaumur.	Délisle	Reaumur.
196	— 24. 5	187	— 20. 0	210	— 32. 0
30 matin		4 matin		12 matin	
246	+ 2. 1	148	+ 1. 1	152	— 1. 1
21 midi		18 midi		7 & 31 midi	
168	— 9. 6	166	— 8. 5	188	— 20. 5
167	— 9. 1	160	— 5. 3	160	— 5. 3
5 jours		13 jours			
15 SE, 11. 27 SOu.,					
9. 10 Ou, 24 NOu.				18 N.	
3 jours		0 jour		3 jours	
0 jour		2 jours		6 —	
1 —		3 —		8 —	
4 jours		8 —		8 —	
2 —		1 jour		0 jour	
5 —		4 jours		0 —	
8 —		5 —		2 jours	
8 —		8 —		4 —	
12 jours		7 jours		25 jours	
18 —		8 —		2 —	
2 —					
0 jour		1 jour			
3 —		9 jours		3 —	

Extrait

Extrait des Observations météorologiques

Année 1781. Février		St. Pétersbourg	
I. Baromètre.	La plus grande élévation	28. 87 le 10	
	La plus petite élévation	27. 30 le 3	
	La variation totale - -	1. 57	
	Le milieu - - -	28. 08	
	La hauteur moyenne - -	27. 97	
II. Thermomètre.		Délisle	Reaumur.
	Le plus grand froid - -	182	— 17. 1
	le	10 matin	
	Le moindre froid - -	147	+ 1. 6
	le	4 & 22 midi	
	Froid moyen de la nuit	164	— 7. 2
	Froid moyen à midi - -	156	— 3. 5
III. Vent.	Vent fort - - - - le	9 jours	
	Vent très fort - - le	3 S	
	Direction des Vents N	4 jours	
	NE	4 —	
	E	0 jour	
	SE	8 jours	
	S	5 —	
	SOu	2 —	
	Ou	3 —	
	NOu	2 —	
IV. Atmosphère.	Ciel entierement serein -	5 jours	
	Ciel entierement couvert	15 —	
	Brouillard - - -	4 —	
	Pluie - - - -	0 jour	
	Neige - - - -	9 —	

faites

faites en divers endroits suivant le vieux Stile.

Moscou.	Astrachan.	Irkoutzk.
28. 41. le 10 & 11	28. 66 le 2 & 3	27. 40 le 6
26. 91. le 25. 26	27. 83 le 25	26. 65 le 26
1. 50	0. 83	0. 75
27. 66	28. 25	27. 03
27. 71	28. 32	27. 09
Delisle Reaumur.	Delisle Reaumur.	Delisle Reaumur.
192 — 22. 4	186 — 19. 2	203 — 28. 3
13 matin	8 & 9 matin	6 & 7 matin
147 + 1. 6	146 + 2. 1	135 + 8. 0
19. 24 & 25 midi	25. 26 & 27 midi	26 & 27 midi
163 — 6. 9	162 — 6. 4	180 — 16. 2
162 — 6. 4	158 — 4. 3	159 — 4. 8
3 jours	8 jours	— —
3. 4. 7. 13. SE	6. 7. 8. SE	4 NE
3 jours	2 jours	0 jour
6 —	2 —	9 jours
1 jour	4 —	3 —
12 jours	13 —	10 —
0 jour	0 jour	2 —
4 jours	0 —	0 jour
2 —	5 jours	0 —
0 —	2 —	4 —
7 jours	10 jours	19 jours
18 —	3 —	8 —
1 jour	0 jour	0 —
0 —	0 —	0 —
10 —	0 —	4 —

Extrait des Obſervations météorologiques

Année 1781. Mars.		St. Pétersbourg	
I. Baromètre.	La plus grande élevation	28. 64 le 23	
	La plus petite élévation	27. 32 le 8	
	La variation totale - -	1. 32	
	Le milieu - - -	27. 98	
	La hauteur moyenne - -	27. 97	
II. Thermomètre.		Delisle	Réaumur.
	Le plus grand froid - -	176	— 14. 0
	le	23 matin	
	La plus grande chaleur	137	+ 7. 0
	le	29 après midi	
	Froid moyen de la nuit	162	— 6. 5
	Froid moyen à midi - -	151	— 0. 5
III. Vent.	Vent fort - - - - -	12 jours	
	Vent très fort - - le	16. 17 E. 29 S	
	Direction des Vents N	4 jours	
	NE	2 —	
	E	2 —	
	SE	0 jour	
	S	1 —	
	SO	2 jours	
	O	7 —	
	NO	13 —	
IV. Atmoſphère.	Ciel entierement ſerein -	11 jours	
	Ciel entierement couver	3 —	
	Brouillard - - - -	1 jour	
	Pluie - - - - -	1 —	
	Neige - - - - -	10 —	

faites

faites en divers endroits suivant le vieux Stile.

Moscou.	Astrachan.	Irkoutzk.
28. 22 le 23 & 24	28. 50 le 11	27. 25 le 2. 3. & 14.
26. 53 le 9	28. 08 le 9 21 & 22	26. 80 le 8. 9. 20 & 30.
1. 69	0. 42	0. 45
27. 37	28. 29	27. 03
27. 63	28. 29	27. 05
Délisle Reaumur.	Délisle Reaumur.	Délisle Reaumur.
186 — 19. 2	161 — 5. 9	179 — 15. 5
24 matin	26 matin	13 matin
134 + 8. 5	142 + 4. 3	117 + 17. 6
29 à midi	22 & 31. après midi	20 après midi
161 — 5. 9	153 — 1. 6	157 — 3. 7
152 — 1. 1	147 + 1. 6	134 + 8. 5
7 jours	13 jours	
9 N. 6. 10. NOu.	9 S. 7 SOu. 8 Ou 10 NOu.	
5 jours	1 jours	3 jours
2 jour	4 —	9 —
0 —	2 —	3 —
0 jours	7 jour	8 —
0 jour	4 jours	0 jour
8 jours	4 —	0 —
7 —	5 —	0 —
9 —	4 —	8 jours
10 jours	7 jours	22 jours
20 —	8 —	4 —
4 —	0 —	0 —
1 —	3 jour	1 jour
9 —	7 —	5 jours
Débacle de la Mosqua le 10.	Grêle le 7	Débacle de l'Angara le 5.
	Débacle de la Wolga le 30.	

Extrait

Extrait des observations météorologiques

Année 1781. Décembre : mois		St. Pétersbourg.
I. Baromètre.	La plus grande élévation	28. 68 le 8
	La plus petite élévation	27. 34 le 3
	La variation totale - -	1. 34
	Le milieu - - - -	28. 01
	La hauteur moyenne -	28. 13
II. Thermomètre.		Délisle Réaumur.
	Le plus grand froid - - le	158 — 4. 3 8 matin
	La plus grande chaleur le	129 + 11. 2 20 midi
	Froid moyen de la nuit	150 0.
	Chaleur moyenne du jour	140 + 5. 5
III. Vent.	Vent fort - - - - -	6 jours
	Vent très fort - - le	4S 2. 3SOu 6Ou. 5NOu
	Direction des Vents. - N	10 jours
	NE	3 —
	E	1 —
	SE	0 jour
	S	2 jours
	SOu	2 —
	Ou	4 —
	NOu	8 —
IV. Atmosphère.	Ciel entierement ſerein -	12 jours
	Ciel entierement couvert	4 —
	Brouillard - - -	6 —
	Pluie - - - - -	9 —
	Neige - - - - -	5 —
		Débac. de la Néva le 14.

faites

faites en divers endroits ſuivant le vieux Stile.

Moscou	Aſtrachan.	Irkoutzk.
28. 18 le 9		28. 25 le 11
27. 08 le 25		27. 00 le 1.
1. 10		1. 25
27. 63		27. 62
27. 70		27. 87
Délisle Reaumur.		Délisle Reaumur.
158 — 4. 3		162 — 6. 4
9 matin		13 matin
117 + 17. 8		118 + 17. 1
24 après midi		6 après midi
144 + 3. 2		149 + 0. 5
132 + 9. 4		128 + 11. 6
12 jours		—
—		—
7 jours		5 jours
3 —		9 —
0 —		0 —
3 —		10 —
2 —		2 jour
4 —		0 —
5 —		1 —
6 —		3 jours
10 jours		13 jours
13 —		3 —
4 —		1 jour
10 —		6 jours
4 —		6 —
		Grêle le 29.

RAPPORT ET ECLAIRCISSEMENS

Sur un Cabeſtan de nouvelle Conſtruction de la façon de Mr. *Eckhard*, à l'uſage de la marine (*).

par

M. *W. L. KRAFFT.*

Le Cabeſtan eſt de tant d'uſage & d'une neceſſité ſi indiſpenſable pour le ſervice de la marine, que tout ce, qui contribue à ſa perfection, eſt en droit de nous interèſſer. Simple, ſolide, peu ſpacieux, comme il eſt dans ſa conſtruction, & ſuſceptible d'un emploi avantageux & commode des forces motrices, il l'emporte en lui même, à l'aveu des mathématiciens ainſi, que des officiers de la marine les plus éclairés, ſur toutes les machines d'une autre eſpece, qu'on pourroit employer pour les mêmes operations. Mais de l'autre coté il ne laiſſe cepen-

(*) Voyés l'Hiſtoire de l'Académie année 1779: Partie II. pag. 22.

cependant pas d'être encore assujetti dans la manoeuvre même à des inconvenients, dont les mariniers n'ont que trop souvant à se plaindre, & dont il seroit fort à désirer pour le bien de la navigation, qu'on trouvat moyen à le délivrer; aussi l'Académie des sciences de Paris avoit-elle proposé, il y a long temps, & deux fois de suite, des prix publics, à qui pourroit enrichir la marine d'un Cabestan nouveau, qui eut les avantages de l'ancien sans en avoir les defauts. (*) Le concours pour ces prix n'a pas manqué de produire des recherches profondes de quelques Géometres du premier ordre, & des réflexions judicieuses de pratique de quelques savans attachés à la marine; de sorte que, quoique l'Académie n'étoit pas satisfaite d'aucune de leurs nouvelles inventions, le recueil des mémoires, qu'elle en à publié, contient cependant ce qu'on a de mieux, & a quoi il conviendroit de rapporter & d'ajouter ce que la sagacité & l'industrie des savans pourra de temps en temps imaginer de nouveau sur cet objet intéressant de mechanique. C'est sous ce point de vüe aussi bien, que par quelques avantages réels mêmes qu'il présente, que le Cabestan de nouvelle Construction, inventé & executé par Mr. *Eckhard*, m'a parû bien digne d'être connû & conservé au recueil des machines. Comme aucune déscription n'en a été publiée, & qu'on n'en sauroit plus esperer une de la part de l'auteur, je me propose d'en donner ici les éclaircissemens & les desseins, en partant des notices, qui m'en sont parvenües, dont la premiere a été communiquée à l'Académie par Mr. le

(*) Voyés le récueil des pieçes, qui ont remporté le prix de l'Acad. de Paris en 1741.

le Prof. *Hauert* d'Utrecht & dont les autres ont été envoyées par S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Golitzin*, à qui l'auteur les avoit présentées pour les offrir à l'Amirauté Impériale, en se reservant cependant le secret du mechanisme principal, caché dans l'interieur de la machine & qui en est la partie essentielle, au quel il me soit permis, en attendant mieux, de suppléer par mes propres idées. Pour apprécier ce que ce Cabestan pourra offrir de nouveau & d'avantageux, je commence par un court exposé de celui, qu'on emploie ordinairement sur les vaisseaux de haut bord; j'y joindrai la description du nouveau & je ferai le parallele des deux.

Le Cabestan ordinaire est composé de deux fusées assemblées par un axe de bois, traversant l'une & l'autre selon leur longueur, & composées de jambages & des traverses, qui sont fixées dans les entailles de l'axe. La fusée supérieure hexagonale, est couronnée par un plateau cylindrique de bois, qui reçoit les six jambages & la partie supérieure quarrée de l'axe; ainsi qu'un pareil plateau de la fusée inférieure, qui est pentagonale, en reçoit les cinq jambages & la moitié inférieure de l'axe, qui dans cet endroit-là est d'un contour décagonale. L'un & l'autre de ces deux plateaux sert à donner de la consistance à l'ensemble des fusées, dont les parties sont outre cela fixées à l'axe & aux plateaux par des chevilles. Les trous quarrés des deux fusées reçoivent des léviers environ de 12 pieds de long; aux extremités desquels la force motrice est appliquée, qui par le rapport ordinaire entre la longueur des barres & le rayon de la fusée, au tour de la quelle le cable ou bien la tournevire se roule,

ne

ne se trouve augmentée, qu'environ dans le rapport de 6 à 1; vû que le rayon de celle-ci est considérablement augmenté par les jambages, qui en même temps qu'elles diminuent la courbure du cordage servent aussi par leurs angles aigûs à retenir la corde, afin qu'elle ne glisse point ou qu'aumoins une force assés petite suffise à la fixer. Une partie importante du Cabestan sont les pals d'arret, destinés à empecher la retrogradation ou le revirement du Cabestan, qu'occasioneroit le poids enlevé, si aux momens du repos des ouvriers il étoit abandonné à lui même; ces pals d'arret, mobiles horizontalement autour des chevilles, & fixés au plancher du pont, diametralement à coté de la fusée supérieure, s'enfoncent à un signal donné dans les angles formés par l'axe & les saillants des Jambages. Pour mettre les ouvriers d'autant plus à l'abri du danger du revirement, que pourroit causer un effort aussi violent, que celui de la réaction du poids enlévé, on forme dans les Cabestans le mieux construits encore d'autres arrêts, en perçant la tête de la fusée inférieure des entailles en glacis, dans lesquels tombent des pals fixés au plancher, & dont on se sert ordinairement pour permettre aux ouvriers de prendre du repos, sans cependant cesser entierement leurs efforts.

La forme du nouveau Cabestan, qui avec tout son appareil est représenté dans la planche cy jointe est à peu près la même, que celle de l'ordinaire. Il consiste en deux fusées A et B (Fig. 1.), dont la supérieure est exactement semblable à la pareille de l'ordinaire; il est à remarquer, qu'elle n'est pour ainsi dire que la clef pour faire agir le mécanisme caché dans la tête de l'inferieure;

celle-ci B eſt pleine pour lui donner d'autant plus de ſolidité, vû que c'eſt elle, qui ſouffre le plus grand effort; on voit aiſément, que ce, qui la conſtitue, n'eſt proprément que la partie XX. La tête cylindrique F de cette fuſée eſt bien plus haute, que celle E de la ſupérieure; elle renferme le mécanisme, dont l'auteur s'eſt réſervé le ſécret, & qui ſert aux divers uſages, que je détaillerai ci-deſſous; elle eſt couverte d'une plaque cylindrique de fer L, qui eſt dentée (Fig. 2.); ces dentures *a*, *a* ſervent à y engrainer les pals d'arrêt verticaux O O, mobiles ſur deux tourillons C C & *d d*, attachés aux poutres du plancher du pont. L'appareil pour prévenir le revirement conſiſte en ce que la fuſée inférieure s'aſſemble en ſa baſe dans un plateau cylindrique G G de bois (Fig. 1.), garni de 4 pals de fer N N, mobiles ſur des chevilles & diamétralement oppoſés deux à deux. Au deſſous de ce plateau il y a un anneau de fer H H, percé en dedans de 12 trous cubiques, proportionnés à la groſſeur des têtes des pals de fer N. La fuſée ſupérieure eſt traverſée dans ſa longueur par un axe de fer A B de 7 à 8 pouces d'epaiſſeur, & quarrée dans l'intérieur de la fuſée (Fig. 3.) à la quelle il tient encore par trois croix de fer K, percés, comme en L de la même forme & dimenſion, comme l'axe. Je ſuppoſe, que cet axe, qui en ſortant de la fuſée ſupérieure eſt d'une forme cylindrique M, & entre par une ouverture de même dimenſion de la plaque de fer L dans la tête de la fuſée inférieure, ne faſſe point corps avec l'axe de celle-ci, mais que l'un ſoit emboité dans l'autre de façon à ne pas ſe géner dans leurs mouvemens; mais que cependant en traverſant une barre de fer par leur emboiture, comme on voit en Q, on puiſſe les fixer l'un dans

dans l'autre, au point de ne faire qu'une seule piece. Au dessûs de l'emboiture ce même axe portera un pignon, dont le nombre des ailes soit $= n$, dans lequel engraine une roue horizontale dentée d'un nombre de dents $= N$, & portant un pignon, dont le nombre des ailes $= m$, fixée au plateau cylindrique L de fer, qui recouvre la tête de la fusée inférieure; ce pignon agit sur une roue dentée d'un nombre de dents $= M$, dont est garni l'axe de la fusée inférieure au dessous de l'emboiture; moyennant quoi la viteſſe de la fusée inférieure ſera à celle de la ſupérieure dans le rapport de $m n$ a $M N$; d'où auſſi avec les dimenſions des parties de la machine on conclura le rapport du poids & de la force ſollicitante pour l'etat d'equilibre, abſtraction faite du frottement & des forces d'inertie de la machine même. On voit au reſte, qu'un Cabeſtan double ou à lanterne tellement arrangé, que je viens de dire, a beaucoup d'analogie avec celui, que Mr. *Euler* a propoſé dans le memoire ſecond de ceux, qui ont remporté le prix de l'Academie de Paris, ainſi qu' avec celui de Mr. *de la Madelaine*, qui ſe trouve au nombre des machines approuvées par la même Académie, quoique il diffère de l'un & de l'autre dans une circonſtance eſſentielle, comme nous verrons tantôt.

Tel eſt, ſi je ne me trompe, l'arrangement eſſentiel du nouveau Cabeſtan en queſtion, ou tel pourroit être au moins celui d'un pareil, qui auroit les mêmes avantages & rendroit les mêmes ſervices.

Quoiqu'on ne ſauroit, ce ſemble, lui accorder tant de ſupériorité ſur l'ordinaire, & le mettre à un prix ſi

haut, qu'il a plû à l'inventeur y donner. vû qu'il eſt toujours encore aſſujetti à ce, qu'à tout temps on a regardé avec raiſon comme le défaut principal de l'ordinaire, ſavoir à *la ſuſpenſion de la manoeuvre cauſée par la néceſſité de choquer le cable ou la tournevire*; cependant on ne peut pas y méconnoitre des corrections utiles de quelques autres défauts de l'ancien & des nouveaux uſages, dont celui-ci n'eſt pas ſuſceptible. Ces avantages ſont les ſuivants:

1.) *Plus de ſolidité dans l'axe & moins de frottement.* L'axe de ce Cabeſtan eſt de fer, de 7 à 8 pouces de diamètre, mobile ſur un pivot de 4 pouces; au lieu, que l'axe de bois de l'ancien a 24 pouces & ſon pivot 12 pouces de diamètre; malgré ces fortes dimenſions, qui étant néceſſaires pour la ſolidité ajoutent à la difficulté du virage en augmentant le frottement dans les etambrais, il eſt ſujet à ſe tordre & à s'uſer inégalement, ce qui le rend difficile à être reparé, faiſant intimement corps avec les deux fuſées. Il eſt donc inconteſtable, que l'axe du nouveau eſt préférable à celui de l'ancien par rapport à la ſolidité, la durée, la facilité de le réparer & la diminution du frottement.

2.) *Diminution du danger dans la manoeuvre même.* Il eſt aiſé à voir, que la maniere ordinaire de prévenir le revirement du Cabeſtan eſt auſſi peu ſûre, que ſuffiſante; d'abord le nombre des arrets & conſéquemment celui des repos poſſibles des ouvriers eſt trop petit, étant limité par la figure polygone

lygone des fusées ; enforte qu'il n'y en a, que 6 ou 5 dans une revolution entiere, & que l'intervalle à parcourir entre deux est environ de 14 pieds & même plus selon la longueur des barres; en second lieu, si les arrêts ne sont pas fermés au juste moment, qu'il faut, & tant soit peu ou troptôt ou troptard, ce qui dépend de l'attention & de celui, qui commande la manoeuvre & de ceux, dont la fonction est de fermer les arrêts; les ouvriers ne courrent, que trop souvant, le risque du revirement, preuve la fréquence des malheurs, qui en arrivent. On ne sauroit disconvenir, que le moyen de prévenir ce danger emploié dans le nouveau Cabestan, l'emporte de beaucoup sur celui de l'ancien 1.) par un plus grand nombre des repos possibles qui va ici jusqu'à 12 & qu'on peut augmenter à volonté en augmentant celui des trous cubiques de l'anneau de fer H; enforte que l'intervalle à parcourir entre deux pourroit aisément être réduit à moins de 4 pieds. 2.) Par ce que ces arrêts se ferment d'eux mêmes par leur propre poids & au moment précis & 3) d'une maniere plus solide & de façon, qu'il n'y a rien à craindre d'un peu de plus ou de moins de virage.

3.) *Augmentation facile de force en cas de besoin.* J'ai dit plus haut, qu'une barre de fer étant traversée par l'emboiture des deux axes moyennant les chevilles Q Q, ils n'en feront, qu'un seul; le rouage intérieur sera mis hors d'activité, & excepté les avantages, que je viens d'indiquer, le

Cabeſtan différera alors en rien des ordinaires. Pour abreger j'ai repréſenté cette operation dans la Fig. 4. Il conviendra ſans doute de s'en ſervir en cet état toutes les fois, que la force ordinaire de la machine ſuffira pour le ſervice. Mais comme on ne peut en augmenter la puiſſance que par un plus grand nombre des ouvriers, ce qui a même ſon terme limité; & qu'il eſt des cas, où cette force ne ſuffit point, comme ſi le vaiſſeau eſt amené au deſſûs de ſon ancre, ou que celle-ci ſoit enrochée ou qu'un equipage ſe trouve foible par une cauſe quelconque: on eſt ſouvant obligé ou à couper le cable ou à recourir aux poulies moufflées, dont l'uſage exige autant de temps, que d'espace, l'un & l'autre ſouvant bien précieux ſelon les cas du vaiſſeau, ou enfin de risquer les vaiſſeaux ſur des ancres légeres, au lieu des groſſes, que le cas exigeroit. Il me paroit, que le mécanisme décrit ci-deſſus, & qui peut être eſt encore beaucoup inférieur à celui, dont Mr. *Eckhard* s'eſt reſervé le ſecrét, pourra en bien de cas prevenir la néceſſité de couper le cable ou dispenſer de l'embarras des poulies, vû qu'il produit avec autant de promptitude, que de facilité & ſans exiger le moins d'espace de plus, une augmentation de force proportionelle aux dimenſions de la machine & du rouage. Pour cet effet on n'a, qu'à detacher moyennant les chevilles Q Q les deux axes l'un de l'autre & à faire baiſſer les pals verticaux O O, qui en engrainant dans les dentures *a a* de la plaque de fer L, (Fig. 3.) la fixeront, ainſi que la roue horizon-

rizontale dentée qui y tient, au point de ne lui permettre, qu'un mouvement de rotation autour de son axe. Or la fusée inferieure B ne faisant pas corps avec la plaque de fer L, le mouvement de la fusée supérieure sera moyennant le rouage transmis à l'inférieure & la force motrice s'y trouvera augmentée selon les loix des roues dentées, quoiqu'avec un rallentissement proportionel de viteſſe. Cette operation est representée dans la fig. 5. Dans le mémoire cité ci-dessûs Mr. *Euler* a trouvé pour un mécanisme assés semblable, que l'arrangement le plus avantageux seroit de faire ensorte, que la viteſſe d'une des fusées soit le double de celle de l'autre.

4.) *Augmentation facile de viteſſe en cas de beſoin.* Il n'y a pas moyen d'augmenter la viteſſe du Cabestan ordinaire, si ce n'est en augmentant celle de la marche des ouvriers; moyen souvant impossible à cause du roulis, & toujours assés limité; aussi Mr. *Euler* dans le mémoire cité en a-t-il remarqué ce defaut. Il est cependant des cas, où la promptitude du desangrage ou de la manoeuvre à faire marcher le vaisseau sur l'ancre, même aux dépens des forces motrices, est d'une grande importance. Il est hors de doute, que le nouveau Cabestan procure cet avantage avec facilité; car par ce qui précède, on voit aisément, que laissant la machine dans l'état, comme cy dessûs, on n'a pour cet effet, qu'à appliquer la force motrice à la fusée inférieure & le cable ou la tournevire à la supérieure; ainsi que je l'ai représenté à la fig. 6.

5.)

5.) *Commodité de changer facilement le Cabeſtan double en deux ſimples, indépendans l'un de l'autre.* Le Cabeſtan ordinaire ne peut faire mouvoir ſes deux fuſées, ſéparement l'une de l'autre; cet avantage ne peut avoir lieu, que dans celui à Lanterne, & pour cet effet Mr. *Euler* dans l'endroit allégué juge à propos, qu'on pût ôter, lorsqu'il en ſeroit beſoin, une des roues dentées, ce qui permettroit à la fuſée ſupérieure de virer ſeule. Quoique ce moyen n'eſt pas praticable dans celui-ci; cependant, comme les deux axes ſont déja indépendans l'un de l'autre, la barre de fer, qui traverſe leur emboiture, étant rétirée moyennant des chevilles Q Q, il ne ſera pas difficile d'imaginer quelque mécanisme pour ſuspendre l'engrenage des roues & leur action réciproque, moyennant quoi pendant que l'une des fuſées améne le cable dans le cas, qui démandent moins de force, l'autre pourroit être employée à toute autre manoeuvre quelconque; où toutefois il faut remarquer, que pour cet effet la fuſée ſupérieure doit ainſi, que l'inférieure, être garnie des arrêts décrits ci-deſſùs pour prévenir le risque du revirement. Cette operation eſt repréſentée à la fig. 7.

OU-

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier ſémeſtre de l'année 1781.

Dans l'Aſſemblée du Lundi 8 Janvier, le Secrétaire de Conférences a lu une lettre de M. le *D. Möhring* à Jévern, qui envoioit une collection de ſemences pour le jardin botanique.

Le 11 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller *Loeſch*, Surintendant du Gymnaſe d'Anſpach, lequel prie l'Académie de vouloir bien, à l'exemple de diverſes autres ſocietés ſavantes, contribuer à l'aggrandiſſement d'une Bibliothéque publique que le dit Gymnaſe vient de fonder, en lui faiſant un don de ſes ouvrages. Cette démande a été accordée, & le Secrétaire chargé d'envoyer au Gymnaſe d'Anſpach un exemplaire complet des Actes académiques publiés depuis 1777.

Le 15 Janvier. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Chrétien Mayer*, Aſtronome à Manheim, une brochure intitulée

Chriſtian Mayer *Churpfältziſcher Hof-Aſtronomus über die Aenderung des Ganges der Arnoldiſchen Schwinguhr.*

Le 18 Janvier. M. le Prof. *Pallas* a remis de la part de M. *Patrin*, Correſpondant de l'Académie, à Kolivan, une collection de ſémences de ces environs pour le jardin botanique.

Le 29 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. *van Swinden* à Franecker, qui envoie la marche des aiguilles aimantées, obſervée pendant l'Aurore boréale du 28 Juillet 1780. Voyez l'Hiſtoire de l'Académie pour cette année Part. IIe.

Le 1 Février. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur un manuſcript intitulé

Tractatus Philoſophicus de Relligionis maxime in doctrina de mentis immortalitate, neceſſitate ſumma in ſocietate civili. Autore *Bernardo Martinio*, Paſtore Batavorum Archangelopoli.

Comme ni la Théologie ni la Philoſophie ſpéculative entrent dans le Plan de l'Académie, ce manuſcript a été renvoyé à l'Auteur.

—— —— M. l'Adjoint *Fuſs* a rapporté que le moulin à ſcier, inventé par le Sr. *Richner* & approuvé par l'Académie

démie (voyez la partie hiſtorique des Actes, Année 1777, premier ſemeſtre pag. 65) a été exécuté à Ochta par M. *de Haaks*, Capitaine d'Artillerie & Chevalier de l'Ordre militaire de St. George; que le ſuccès, moyennant quelques legers changemens, a parfaitement répondu aux avantages qu'on s'en étoit promis, & que cette machine mûe par les bras de huit hommes fait agir cinq ſcies.

Le 22 Février. Le Secrétaire a remis la médaille frappée à la mémoire du feu Conſeiller Privé Schlatter, Préſident du Collège des Mines & Monnoyes, que la famille du défunt lui avoit fait remettre pour être préſentée à l'Académie & conſervée dans ſon médailler.

—— —— il a préſenté de la part de M. le Docteur *Wolff*, Médecin à Dantzig, l'ouvrage ingénieux qu'il a publié en 1776 ſous le titre

Genera plantarum vocabulis characteriſticis definita

Le 26 Février. M. le Conſeiller de Cour *Lepechin* a lu une lettre adreſſée au Directeur de l'Académie par S. E. Mr. de Paſſec, Lieutenant-Général & Gouverneur de Mohilew, qui envoie pour être examiné à l'Académie un manuſcript d'un Géodeſiſte de la province, contenant des méditations ſur l'inclinaiſon de l'aiguille magnétique & le mouvement de la terre. Il s'eſt trouvé que l'auteur n'a pas une idée juſte des choſes ſur lesquelles roulent ſes méditations.

—— —— il a communiqué le deſſin d'un Parhélie fort réluiſant formé par pluſieurs cercles lumineux, que le

Capitaine *Schmalev* a observé dans la Fortéreſſe Tiguilsky en Kamtſchatka le 23 Mars 1780 depuis 10 heures & demie jusqu'à midi, & que S. E. Mr. *de Kliſchka*, Général-Major & Gouverneur d'Irkoutzk' lui a envoyé pour être préſenté à l'Académie. Ce Gouverneur mande auſſi qu'on a vu à la fortereſſe Hiſchinski le 2 Novembre 1779 à midi vers l'Eſt un météore igné qui reſſembloit à un éclair, & qui a auſſi été ſuivi d'un grand coup de Tonnère: mais que ce phénomène a duré près d'une minute de tems avant d'éclater.

Le 12 Mars. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Patrin*, Correſpondant de l'Académie à *Barnaoul*, un manuſcript intitulé *Flora Barnaulenſis* avec un herbier des plantes les plus intéreſſantes alleguées & décrites dans la Flora.

—— —— M. l'Adjoint *Zouyef* a remis un pacquet de branches du Rhododendron, qui lui a été adreſſé pour l'Académie par M. le Secrétaire *Popof* à Yeniſeisk'.

Le 15 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée au Directeur de l'Académie des Sciences par M. le Chevalier *de Beaurain*, qui envoioit le Proſpectus de l'Hiſtoire des Campagnes du Maréchal de Turenne en 1672 —— 75.

Le 19 Mars. Le Secrétaire a lu un Rapport de M. *Jährig* daté de Gouſinoi Oſero le 14 Décembre, qui envoie une introduction à l'Aſtronomie indienne, qu'il a traduite du mongal en allemand.

Le

Le 22 Mars. M. le Prof. *Pallas* a préſenté de la part de M. *Joſeph Banks* Esq. un paquet de diverſes ſémences, recueillies pendant le dernier voyage du célébre Cap. *Cook*.

Le 26 Mars. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Societé royale des ſciences de Göttingue

Commentationes Societatis regiae ſcientiarum Göttingenſis per annum MDCCLXXIX. Vol. II.

& de la part de M. *de Magellan* à Londres.

Déſcription d'une machine nouvelle de Dynamique inventée par M. *Atwood*, au moyen de laquelle on rend très-aiſément ſenſibles les loix du mouvement des corps en ligne droite, en rotation etc. par *J. H. de Magellan*.

Le 16 Avril. M. le Conſeiller de Cour & Bibliothécaire *Kotelnikof* a expoſé un monſtre humain mâle conſervé dans de l'eſprit de vin, que le Directeur avoit envoyé pendant les vacances de Pâques, au cabinet d'Hiſtoire naturelle. Ce monſtre a un viſage fort applati, dont tout le côté gauche avec l'oeil eſt couvert d'une peau garnie de petits poils, laquelle descend comme un ſac le long de l'occiput, jusqu'à l'épaule. Les bras auſſi bien que les jambes ſont des troncs informes, & la main gauche n'a que quatre doigts.

Le 19 Avril. Le Secrétaire a remis les papiers de feu M. *Güldenſtaedt* avec tout ce qu'il a trouvé dans cette ſucceſſion appartenir à l'Académie, & qui conſiſtoit

dans un herbier très volumineux, dans quelques ſquelettes d'animaux de la claſſe des chèvres, & dans les manuſcripts du Prof. *Gmelin*, de la rédaction desquels le défunt Académicien avoit été chargé. Les ſquelettes & l'herbier ont été dépoſés au cabinet d'Hiſtoire naturelle, & les papiers examinés & enrégiſtrés par quelques Académiciens: Sur le rapport desquels le Directeur a chargé M. le Prof. *Pallas* de rédiger les manuſcripts des deux Académiciens défunts & d'être l'éditeur de leurs voyages.

Le 23 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre datée de Hambourg le 31 Mars & adreſſée au Directeur de l'Académie des Sciences par M. *Ernſt Chriſtoph Schultz*, qui envoie un paquet cachété, dont l'enveloppe imprimée indique ſous la date de la naiſſance de S. M. l'Impératrice (*), que ce paquet contient la découverte d'une nouvelle pierre précieuſe orientale, dont les qualités ſingulieres ſurprendront tous les minéralogues. M. *Schultz* prie l'Académie de dépoſer le paquet & de ne l'ouvrir qu'après ſa mort, ou lorsque par un nombre ſuffiſant de ſouſcripteurs, il ſe ſera vu en état de publier ſa découverte. Le Secrétaire mit à ce paquet une ſeconde enveloppe & après l'avoir cacheté, il le dépoſa aux Archives.

—— —— il a préſenté un mémoire

Sur l'inſcription des figures rectilignes du même *plus petit contour* à des figures rectilignes du même nom.

que

(*) L'Auteur ſuppoſoit que l'Académie tiendroit dans ce jour ſolemnel, une Aſſemblée publique.

que l'Auteur, M. *Simon Lhuilier*, Citoien de Génève, a envoié & soumis au jugement de l'Académie. Ce mémoire a été communiqué à Mrs. *Euler* le pere & *Fuss*, qui en ont fait un rapport très favorable. (*)

Le 30 Avril. Le Secrétaire a présenté de la part de M. *Bode*, Astronome royal à Berlin, le Prospectus de la continuation des Ephémérides astronomiques, que l'Académie Royale des Sciences & Belles-lettres a cessé de publier avec l'année 1783.

—— —— Il a lu une lettre adressée à l'Académie par Mrs. de la Societé Electorale de Météorologie établie à Mannheim, & une autre de M. *l'Abbé Hemmer*, Secrétaire de cette Societé, qui envoie un imprimé intitulé

Monitum ad observatores societatis meteorologicae Palatinae a Sereniſſimo Electore Carolo Theodoro recens inſtitutae.

& qui annonce que la Societé météorologique a déja expédié à Lubec, à l'adresse de l'Académie Impériale des Sciences, les instrumens correspondans ou harmoniques, avec lesquels les Physiciens de la Russie sont invités de faire à l'avenir leurs observations météorologiques.

Le 17 Mai. Le Secrétaire a présenté:

Lythologie Sicilienne, suivie d'un Discours sur la Calcara de Palerme, par M. le Comte de *Borch*, de plusieurs Académies

que

(*) L'Académie se propose de faire imprimer ce mémoire avec quelques autres que des savans étrangers lui ont envoiés, & qui ont mérité ses éloges.

que l'Auteur lui a fait remettre pour être offerte à l'Académie.

Le 4 Juin. M. l'Adjoint *Fuss* a lu une lettre de M. *Isaac Iselin de Bâle*, qui envoie le troisième cahier de son Journal intitulé *Ephemeriden der Menschheit*, année 1781, dans lequel il a inséré & dédié à l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, une traduction de l'écrit de M. le Baron *Tschudi* sur la transplantation des végétaux, leur naturalisation & l'art de les perfectioner.

—— —— M. le Prof. *Pallas* a présenté le Prospectus d'une déscription des animaux les plus remarquables que M. le Prof. *Brünnich* à Coppenhague se propose de publier avec des figures colorées.

Le 14 Juin. Le Secrétaire a ouvert la Caisse d'Instrumens météorologiques envoyée de Manheim. Comme quelques Instrumens ont été brisés en route, le Secrétaire a été chargé d'écrire à M. *Hemmer*, pour savoir si la Société Électorale veut réparer cette perte.

Le 25 Juin. M. l'Adjoint *Géorgi* a remis le Catalogue du Cabinet de feu M. *Feldmann*, Docteur & Physicien à Ruppin en Brandenbourg, que les héritiers lui avoient envoyé pour être présenté à l'Académie.

MATHE-

MATHEMATICA.

NOVA METHODVS
INTEGRANDI FORMVLAS DIFFERENTIALES RATIONALES
SINE
SVBSIDIO QVANTITATVM IMAGINARIARVM.

Auctore
L. EVLERO.

Theorema I.

§. 1. *Si fuerit* $xx - 2x\cos.\omega + 1 = 0$, *tum omnes poteſtates ipſius* x *reduci poterunt ad formam ſimplicem* $\alpha x + \beta$.

Demonſtratio.

Cum ſit $xx - 2x\cos.\omega + 1 = 0$, erit

$$x^{\lambda+2} = 2x^{\lambda+1}\cos.\omega - x^{\lambda},$$

vnde ſi poteſtates x^{λ} et $x^{\lambda+1}$ ad formam praeſcriptam

$\alpha x + \beta$ redigi queant, tum etiam potestas $x^{\lambda+s}$ per eandem formam exprimi poterit. Incipiamus igitur a potestatibus infimis, quas ita exhibeamus:

$$x = \frac{x \sin.\omega}{\sin.\omega} \text{ et } xx = \frac{2x \sin.\omega \cos.\omega - \sin.\omega}{\sin.\omega} = \frac{x \sin.2\omega - \sin.\omega}{\sin.\omega}.$$

His igitur constitutis, cum sit

$$2 \cos.\omega \sin.\lambda\omega = \sin.(\lambda+1)\omega + \sin.(\lambda-1)\omega,$$

ex his duabus formulis facile eliciemus sequentes:

$$x^2 = 2xx \cos.\omega - x = \frac{x \sin.3\omega - \sin.2\omega}{\sin.\omega},$$

$$x^4 = 2x^3 \cos.\omega - xx = \frac{x \sin.4\omega - \sin.3\omega}{\sin.\omega},$$

hocque modo quousque libuerit progredi licet; atque hinc in genere concludimus fore

$$x^n = \frac{x \sin.n\omega - \sin.(n-1)\omega}{\sin.\omega},$$

quae ergo expressio formam habet $\alpha x + \beta$.

Corollarium 1.

§. 2. Cum sit

$$\sin.(n-1)\omega = \sin.n\omega \cos.\omega - \cos.n\omega \sin.\omega,$$

hoc valore substituto fiet

$$x^n = \frac{x - \cos.\omega}{\sin.\omega} \sin.n\omega + \cos.n\omega;$$

quamobrem si fuerit $xx - 2x \cos.\omega + 1 = 0$, pro omnibus potestatibus ipsius x habebimus hanc reductionem:

$$x^n = \frac{x - \cos.\omega}{\sin.\omega} \sin.n\omega + \cos.n\omega,$$

qua forma deinceps potissimum utemur.

Corollarium 2.

§. 3. Hinc igitur erit:

$x^{k+n} = \frac{x - \text{cof. } \omega}{\text{fin. } \omega} \text{ fin. } (k+n)\,\omega + \text{cof. } (k+n)\omega$ et

$x^{k-\omega} = \frac{x - \text{cof. } \omega}{\text{fin. } \omega} \text{ fin. } (k-n)\,\omega + \text{cof. } (k-n)\,\omega,$

quare his formulis addendis, ob

$\text{fin. } (k+n)\,\omega + \text{fin. } (k-n)\,\omega = 2 \text{ fin. } k\,\omega \text{ cof. } n\,\omega$ et

$\text{cof. } (k+n)\,\omega + \text{cof. } (k-n)\,\omega = 2 \text{ cof. } k\,\omega \text{ cof. } n\,\omega$

fiet

$x^{k+n} + x^{k-n} = \frac{2(x - \text{cof. } \omega)}{\text{fin. } \omega} \text{ fin. } k\,\omega \text{ cof. } n\,\omega + 2 \text{ cof. } k\,\omega \text{ cof. } n\,\omega$

fiue

$x^{k+n} + x^{k-n} = 2 \text{ cof. } n\,\omega \left(\frac{x - \text{cof. } \omega}{\text{fin. } \omega}\right) \text{ fin. } k\,\omega + \text{cof. } k\,\omega).$

Corollarium 3.

§. 4. Sin autem poteſtatem poſteriorem a priore ſubtrahamus, ob

$\text{fin. } (k+n)\,\omega - \text{fin. } (k-n)\,\omega = 2 \text{ cof. } k\,\omega \text{ fin. } n\,\omega$ et

$\text{cof. } (k+n)\,\omega - \text{cof. } (k-n)\,\omega = -2 \text{ fin. } k\,\omega \text{ fin. } n\,\omega,$

habebimus

$x^{k+n} - x^{k-n} = \frac{2(x - \text{cof. } \omega)}{\text{fin. } \omega} \text{ cof. } k\,\omega \text{ fin. } n\,\omega - 2 \text{ fin. } k\,\omega \text{ fin. } n\,\omega.$ h. e.

$x^{k+n} - x^{k-n} = 2 \text{ fin. } n\,\omega \left(\frac{x - \text{cof. } \omega}{\text{fin. } \omega}\right) \text{ cof. } k\,\omega - \text{fin. } k\,\omega).$

Corollarium 4.

§. 5. Etiamſi noſtra demonſtratio tantum ad poteſtates integras ipſius x perduxit, tamen ex indole harum formarum facile intelligitur, eas etiam pro exponentibus fractis, vel adeo irrationalibus, locum habere, quandoquidem in ipſis his formulis nihil ineſt, quod tantum ad valores integros exponentis n reſtringatur; tum vero etiam nihil impedit, quominus exponenti n valores negatiui

tiui tribuantur. Si enim v. g. ſumamus $n = \frac{1}{2}$, per formulam Coroll. I. eſſe debet

$$\sqrt{x} = \frac{x - \text{cof. } \omega}{\text{ſin. } \omega} \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\omega + \text{cof. } \tfrac{1}{2}\omega,$$

vnde ſumtis quadratis, ob

$$(x - \text{cof. } \omega)^2 = x\,x - 2\,x \text{ cof. } \omega + \text{cof. } \omega^2 = -\text{ ſin. } \omega^2,$$

habebimus

$$x = -\text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\omega^2 + \frac{2(x - \text{cof. } \omega)}{\text{ſin. } \omega} \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\omega \text{ cof. } \tfrac{1}{2}\omega + \text{cof. } \tfrac{1}{2}\omega^2,$$

quae forma, ob

$$2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\omega \text{ cof. } \tfrac{1}{2}\omega = \text{ſin. } \omega \text{ et cof. } \tfrac{1}{2}\omega^2 - \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\omega^2 = \text{cof. } \omega,$$

abit in $x = x$, h. e. aequationem identicam.

Scholion.

§. 6. Formulae quas hic ſumus adepti egregie conueniunt cum iis, quas calculus imaginariorum ſuppeditat. Cum enim aequatio $x\,x - 2\,x \text{ cof. } \omega + 1 = 0$ contineat has radices: $x = \text{cof. } \omega \pm \text{ ſin. } \omega . \sqrt{-1}$, erit, vti in analyſi eſt oſtenſum, $x^n = \text{cof. } n\,\omega \pm \text{ſin. } n\,\omega . \sqrt{-1}$; quare cum ſit

$$x^n - \text{cof. } n\,\omega = \pm \text{ ſin. } n\,\omega . \sqrt{-1} \text{ et}$$

$$x - \text{cof. } \omega = \pm \text{ ſin. } \omega \sqrt{-1},$$

illa forma per hanc diuiſa dabit

$$\frac{x^n - \text{cof. } n\,\omega}{x - \text{cof. } \omega} = \frac{\text{ſin. } n\,\omega}{\text{ſin. } \omega},$$

vnde ſequitur fore

$$x^n - \text{cof. } n\,\omega = \frac{x - \text{cof. } \omega}{\text{ſin. } \omega} \text{ ſin. } n\,\omega,$$

prorſus vti in Coroll. I. inuenimus. Ceterum noſtrum Theorema generalius proponi et ad aequationem

$x\,x - 2\,a\,x \cos.\,\omega + a\,a$

extendi potuiſſet; tum enim prodiiſſet

$$x^n = \frac{a^{n-1}\,x \sin.\,n\,\omega - a^n \sin.\,(n-1)\,\omega}{\sin.\,\omega},$$

deinde etiam

$$x^n = \frac{a^{n-1}\,(x - a\cos.\,\omega)}{\sin.\,\omega}\,\sin.\,n\,\omega + a^n \cos.\,n\,\omega,$$

quae formulae a prioribus non diſcrepant, niſi quod hic littera a homogeneitatem dimenſionum expleat. Hae ſcilicet formulae ex illis immediate ſequentur, ſi ibi loco x ſcribatur $\frac{x}{a}$; ſed breuitati et concinnitati conſulentes eiusmodi tantum caſus euoluemus, in quibus pro a commode vnitatem ſcribere liceat.

Theorema II.

§. 7. *Si fuerit* $\mathrm{x\,x} - 2\,\mathrm{x}\cos.\,\omega + 1 = 0$, *omnes functiones rationales integrae, quaecunque poteſtates ipſius* x *in iis occurrant, ſemper reduci poſſunt ad hanc formam ſimplicem* $\alpha\,\mathrm{x} + \beta$.

Demonſtratio.

Si functio propoſita iam penitus fuerit euoluta, ita vt nullos factores complectatur, tum ea ope reductionis $x^n = \frac{x - \cos.\,\omega}{\sin.\,\omega}\sin.\,n\,\omega + \cos.\,n\,\omega$ ſponte redigitur ad talem formam: $\frac{\mathrm{F}\,(x - \cos.\,\omega)}{\sin.\,\omega} + \mathrm{G}$. Verum ſi functio propoſita duobus conſtet factoribus, veluti $\mathrm{P}\,p$, ac per iſtam reductionem prodierit

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{F}\,(x - \cos.\,\omega)}{\sin.\,\omega} + \mathrm{G} \text{ et } p = \frac{f\,(x - \cos.\,\omega)}{\sin.\,\omega} + g,$$

tum

tum facta multiplicatione, ob $(x - \text{cof. } \omega)^2 = -\text{ſin. } \omega^2$ colligitur fore

$$P p = -F f + G g + \frac{(F g + f G)(x - \text{cof. } \omega)}{\text{ſin. } \omega},$$

quod ergo productum eiusdem eſt formae; vnde ſimul patet, quotcunque eiusmodi dentur factores, eorum productum ſemper ad eandem formam reduci poſſe.

Corollarium 1.

§. 8. Quodſi hoc modo prodierit

$$P = \frac{F(x - \text{cof. } \omega)}{\text{ſin. } \omega} + G,$$

tum erit

$$P(x - \text{cof. } \omega) = -F \text{ ſin. } \omega + G(x - \text{cof. } \omega),$$

quae expreſſio ideo eſt notatu digna, quod in ſequentibus integrationibus vbique occurret.

Corollarium 2.

§. 9. Si functio P factorem habuerit

$$x x - 2 x \text{ cof. } \omega + 1,$$

tum poſito, vti aſſumimus,

$$x x - 2 x \text{ cof. } \omega + 1 = 0,$$

valor ipſius P etiam euaneſcere debet. Hoc ergo caſu formula $\frac{F(x - \text{cof. } \omega)}{\text{ſin. } \omega} + G$ fiet $= 0$, id quod, ob x quantitatem indefinitam, aliter euenire nequit, niſi fuerit et $F = 0$ et $G = 0$. Atque hinc viciſſim, ſi facta reductione prodeat $P = 0$, hoc certum erit ſignum, ipſam functionem inuolvere factorem $x x - 2 x \text{ cof. } \omega + 1$.

Theo-

Theorema III.

§. 10. *Si fuerit* $xx - 2x\cos.\omega + 1 = 0$, *tum etiam omnes functiones fractae rationales semper ad formam simplicem* $\alpha x + \beta$ *reduci possunt.*

Demonstratio.

Sit enim proposita functio quaecunque fractio $\frac{P}{p}$, atque adhibita nostra reductione prodierit

$$P = \frac{F(x - \cos.\omega)}{\sin.\omega} + G \text{ et } p = \frac{f(x - \cos.\omega)}{\sin.\omega} + g,$$

ita vt peruenerimus ad hanc fractionem:

$$\frac{P}{p} = \frac{\frac{F(x - \cos.\omega)}{\sin.\omega} + G}{\frac{f(x - \cos.\omega)}{\sin.\omega} + g}.$$

Iam vt ipsam litteram x ex denominatore expellamus, multiplicemus tam numeratorem quam denominatorem per formulam $\frac{f(x - \cos.\omega)}{\sin.\omega} - g$; sic enim, ob

$$(x - \cos.\omega)^2 = -\sin.\omega^2,$$

pro denominatore reperiemus: $-ff - gg$; at vero pro numeratore:

$$-Ff + \frac{(fG - Fg)(x - \cos.\omega)}{\sin.\omega} - Gg,$$

vnde mutatis signis forma nostrae fractionis erit

$$\frac{P}{p} = \frac{\frac{(Fg - fG)(x - \cos.\omega)}{\sin.\omega} + Ff + Gg}{ff + gg},$$

siue concinnius:

$$\frac{P}{p} = \frac{Fg - fG}{ff + gg} \cdot \frac{x - \cos.\omega}{\sin.\omega} + \frac{Ff + Gg}{ff + gg}.$$

Problema.

§. 11. *Propoſita formula differentiali rationali quacunque, eam in ſuas fractiones partiales reſoluere, ac deinceps eius integrale inueſtigare.*

Solutio.

Repraeſentetur formula differentialis ſub hac ſpecie: $\frac{P}{Q}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{P\,dx}{Qx}$, ita tamen, vt $\frac{P}{x}$ maneat functio integra, ne x ſit factor denominatoris. Ante omnia quaerantur igitur ipſius Q omnes factores tam ſimplices quam duplices reales; et quia ſimplices nulla laborant difficultate, hic tantum duplices ſum contemplaturus, quorum forma ſit $xx - 2x\cos.\omega + 1$, ita vt, poſito $xx - 2x\cos.\omega + 1 = 0$, quantitas Q ſimul in nihilum abeat, ex qua conditione omnes valores anguli ω elici poterunt, ita vt hoc modo omnes factores denominatoris Q obtineantur. Nunc igitur fractionem $\frac{P}{Qx}$ in totidem fractiones partiales reſolui oportet, quot inuenti fuerint factores formae

$$xx - 2x\cos.\omega + 1.$$

Sit igitur in genere fractio partialis ex iſto factore nata $= \frac{\alpha x + \beta}{xx - 2x\cos.\omega + 1}$, quandoquidem nouimus, eius numeratorem talem formam: $\alpha x + \beta$ habere debere; pro reliquis autem fractionibus partialibus omnibus ſcribamus litteram R, ita vt eſſe debeat

$$\frac{P}{Qx} = \frac{\alpha x + \beta}{xx - 2x\cos.\omega + 1} + R,$$

et multiplicando per $xx - 2x\cos.\omega + 1$ habebimus:

$$\frac{P(xx - 2x\cos.\omega + 1)}{Qx} = \alpha x + \beta + R(xx - 2x\cos.\omega + 1).$$

Quodſi ergo iam faciamus $xx - 2x\cos.\omega + 1 = 0$, erit

αx

$$\alpha x + \beta = \frac{P(xx - 2x\,\text{cof.}\,\omega + 1)}{Qx} = \frac{P}{x} \cdot \frac{xx - 2x\,\text{cof.}\,\omega + 1}{Q},$$

vbi in priore factore $\frac{P}{x}$ ista fubstitutio nullam habet difficultatem; verum in altera fractione $\frac{xx - 2x\,\text{cof.}\,\omega + 1}{Q}$, quia, posito $xx - 2x\,\text{cof.}\,\omega + 1 = 0$, non solum numerator sed etiam denominator Q euanescit, secundum praecepta cognita vtriusque loco eius differentiale scribamus, siquidem hoc casu fieri debet

$$\frac{xx - 2x\,\text{cof.}\,\omega + 1}{Q} = \frac{2\,dx\,(x - \text{cof.}\,\omega)}{dQ};$$

sicque obtinebitur numerator quaesitus

$$\alpha x + \beta = \frac{2\,P\,dx\,(x - \text{cof.}\,\omega)}{x\,dQ}.$$

Ponamus igitur per hanc fubstitutionem fieri

$$P = \frac{P\,(x - \text{cof.}\,\omega)}{\text{fin.}\,\omega} + G \text{ et } \frac{x\,dQ}{dx} = \frac{f\,(x - \text{cof.}\,\omega)}{\text{fin.}\,\omega} + g,$$

ita vt fit

$$\frac{P\,dx}{x\,dQ} = \frac{\frac{P\,(x - \text{cof.}\,\omega)}{\text{fin.}\,\omega} + G}{\frac{f\,(x - \text{cof.}\,\omega)}{\text{fin.}\,\omega} + g},$$

quae forma per Theorema tertium reducitur ad hanc:

$$\frac{P\,dx}{x\,dQ} = \frac{Pg - fG}{ff + gg} \cdot \frac{x - \text{cof.}\,\omega}{\text{fin.}\,\omega} + \frac{Pf + Gg}{ff + gg},$$

quae ergo insuper per $2\,(x - \text{cof.}\,\omega)$ multiplicata, ob

$$(x - \text{cof.}\,\omega)^2 = -\,\text{fin.}\,\omega^2,$$

praebet numeratorem quaesitum:

$$\alpha x + \beta = \frac{2\,(Pf + Gg)\,(x - \text{cof.}\,\omega)}{ff + gg} + \frac{2\,fG - 2\,Pg}{ff + gg}\,\text{fin.}\,\omega.$$

Multiplicetur igitur ista forma per $\frac{dx}{xx - 2x\,\text{cof.}\,\omega + 1}$, atque obtinebitur pars integralis ex hac fractione partiali oriunda:

$$\frac{2\,(Pf + Gg)}{ff + gg} \int \frac{dx\,(x - \text{cof.}\,\omega)}{xx - 2x\,\text{cof.}\,\omega + 1} + \frac{fG - Pg}{ff + gg}\,\text{fin.}\,\omega \int \frac{dx}{xx - 2x\,\text{cof.}\,\omega + 1}.$$

Hic igitur pro priore parte manifesto est

$$\int \frac{d x\,(x - \text{cof. } \omega)}{x\,x - 2\,x\,\text{cof. } \omega + 1} = l\,V(x\,x - 2\,x\,\text{cof. } \omega + 1),$$

quod integrale iam ita eſt ſumtum, vt euaneſcat poſito $x = 0$; pro altero autem membro facile reperitur:

$$\int \frac{d x\,\text{ſin. } \omega}{1 - 2\,x\,\text{cof. } \omega + x\,x} = \text{A tang. } \frac{x\,\text{ſin. } \omega}{1 - x\,\text{cof. } \omega},$$

quod itidem euaneſcit poſito $x = 0$, quocirca pars integralis, ex denominatoris Q factore $x\,x - 2\,x\,\text{cof. } \omega + 1$ orta erit

$$\frac{2(Ff + Gg)}{ff + gg}\,l\,V(x\,x - 2\,x\,\text{cof. } \omega + 1) + \frac{2(fG - Fg)}{ff + gg}\,\text{A tang. } \frac{x\,\text{ſin. } \omega}{1 - \text{cof. } \omega}.$$

Corollarium 1.

§. 12. Duo autem caſus hic ſingularem euolutionem poſtulant: alter; quo $\omega = 0$, alter vero quo $\omega = 180°$; priore enim caſu denominator $x\,x - 2\,x\,\text{cof. } \omega + 1$ abit in $(x - 1)^2$, poſteriore vero in $(x + 1)^2$. Cum autem hinc plus concludere non liceat, quam vel $1 - x$ vel $1 + x$ eſſe factorem denominatoris, his caſibus pars integralis in genere inuenta tantum ad ſemiſſem redigi debet, quemadmodum in principiis Calculi integralis fuſius eſt oſtenſum. Ceterum his caſibus poſterior pars a circulo pendens ſemper euaneſcet.

Corollarium 2.

§. 13. Praeter hos autem binos caſus portio integralis ex formula $x\,x - 2\,x\,\text{cof. } \omega + 1$ ſemper conſtabit duabus partibus, altera logarithmica altera circulari, niſi forte fuerit vel $Ff + Gg = 0$, vel $fG - gF = 0$. Priore enim caſu haec portio tantum arcum circularem inuoluet, poſteriore vero tantum logarithmum.

Scho-

Scholion.

§. 14. Quoniam assumimus denominatoris Q factorem esse $xx - 2x\cos.\omega + 1$, alias denominatoris formas hic non contemplabimur, nisi quarum omnes factores tali formula exprimi queant. Tales autem formulae simpliciores occurrunt tres sequentes:

$$Q = 1 + x^{2k},\ Q = 1 - x^{2k},\ Q = 1 + 2x^k\cos.\eta + x^{2k},$$

vbi quidem in prioribus potestati ipsius x exponentem parem tribuimus, quoniam casus, quibus esset impar, facile ad hanc formam reduci possunt. Si enim denominator esset $1 + x^i$, denotante i numerum imparem, tantum loco x scribamus y^2, prodibitque talis forma: $1 + y^{2i}$; at tali substitutione natura formulae differentialis neutiquam mutatur. Hos ergo tres casus in sequentibus tribus Problematibus particularibus omni cura percurramus, quo magis praestantia istius nouae methodi prae aliis, quae adhuc in vsu fuerunt, eluceat.

Problema particulare I.

§. 15. *Si fuerit* $Q = 1 + x^{2k}$, *inuestigare integrale huius formulae differentialis:* $\frac{P\,dx}{(1 + x^{2k})\,x}$; *vbi quidem* $\frac{P}{x}$ *sit functio integra, in qua nullae potestates altiores occurrant, quam exponentis* $2k$, *ne scilicet ista fractio euadat spuria.*

Solutio.

Cum sit $Q = 1 + x^{2k}$, sit eius factor trinomialis quicunque $= xx - 2x\cos.\omega + 1$, ita vt numerus talium factorum sit $= k$; quare cum, posito

$$x\,x - 2\,x\,\text{cof.}\,\omega + 1 = 0,$$

etiam ipſa formula $1 + x^{2k}$ euaneſcere debeat, facta ſubſtitutione debita ſecundum Theorema II. fiet

$$Q = 1 + \frac{(x - \text{cof.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\omega}\,\text{ſin.}\,2k\omega + \text{cof.}\,2k\omega,$$

qui valor cum debeat euaneſcere, erit tam $\text{ſin.}\,2k\omega = 0$, quam $1 + \text{cof.}\,2k\omega = 0$. Conditio ergo poſterior praebet $\text{cof.}\,2k\omega = -1$; vnde intelligitur, angulum $2k\omega$ eſſe debere vel π, vel 3π, vel 5π, vel in genere $(2i-1)\pi$, denotante $2i-1$ numerum imparem quemcunque. Valores igitur anguli ω erunt ſequentes:

$$1^{\circ}.\ \omega = \frac{\pi}{2k},\ 2^{\circ}.\ \omega = \frac{3\pi}{2k},\ 3^{\circ}.\ \omega = \frac{5\pi}{2k},$$

et generatim $\omega = \frac{(2i-1)\pi}{2k}$, quorum numerus cum eſſe debeat $= k$, vltimus valor erit $\omega = \frac{(2k-1)}{2k}\pi$; ſingulis autem iſtis valoribus ſimul prior conditio adimpletur, qua eſſe debet $\text{ſin.}\,2k\omega = 0$. Quodſi iam pro ω vnusquisque horum valorum accipiatur, atque ponatur

$$x\,x - 2\,x\,\text{cof.}\,\omega + 1 = 0,$$

quicunque fuerit numerator P, ſumamus facta hac ſubſtitutione fieri

$$P = \frac{F(x - \text{cof.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\omega} + G;$$

tum vero erit $\frac{x\,d\,Q}{dx} = 2k\,x^{2k}$, vnde, cum noſtro caſu fieri debeat $Q = 0$, erit vtique $x^{2k} = -1$, ſicque fiet

$$\frac{x\,d\,Q}{dx} = -2k.$$

Cum igitur haec formula in genere poſita ſit $\frac{f(x - \text{cof.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\omega} + g$, erit nunc $f = 0$ et $g = -2k$, quo inuento ſecundum praecepta ante tradita pars integralis ex hoc factore denominatoris $x\,x - 2\,x\,\text{cof.}\,\omega + 1$, oriunda erit

$$-\frac{G}{k}$$

$-\frac{G}{k} l V(xx - 2x \cos.\omega + 1) + \frac{F}{k} A \text{ tang.} \frac{x \sin.\omega}{1 - x \cos.\omega}$,

consequenter si ex singulis valoribus anguli ω istae partes integralis formentur, et in vnam summam colligantur, impetrabitur totum integrale formulae differentialis propositae; et quia hoc casu nunquam fieri potest vel $\omega = 0$, vel $\omega = \pi$, cautione supra indicata non erit opus.

Corollarium 1.

§. 16. Quodsi numerator P fuerit potestas simplex ipsius x, puta x^m, existente $m > 0$, at $m < 2k$, vt formula integranda sit $\int \frac{x^{m-1} dx}{1 + x^{2k}}$, posito

$xx - 2x \cos.\omega + 1 = 0$, erit formula

$P = x^m = \frac{(x - \cos.\omega)}{\sin.\omega} \sin. m\omega + \cos. m\omega$, ideoque

$F = \sin. m\omega$ et $G = \cos. m\omega$,

vnde quaelibet portio integralis induet hanc formam:

$-\frac{\cos. m\omega}{k} l V(xx - 2x \cos.\omega + 1) \frac{\sin. m\omega}{k} A \text{ tang.} \frac{x \sin.\omega}{1 - x \cos.\omega}$,

et aggregatum omnium harum partium, siquidem loco ω succesiue singuli eius valores substituantur, dabit totum integrale formulae huius propositae, ita sumtum, vt euanescat posito $x = 0$.

Corollarium 2.

§. 17. Si numerator P ex pluribus huiusmodi terminis constet, vt sit $P = a x^\alpha + b x^\beta + c x^\gamma +$ etc. integratio maiore difficultate non laborat; erit enim

$F = a \sin. \alpha\omega + b \sin. \beta\omega + c \sin. \gamma\omega$ etc. et

$G = a \cos. \alpha\omega + b \cos. \beta\omega + c \cos. \gamma\omega$ etc.

hincque totum integrale facile expedietur.

Scho-

Scholion.

§. 18. Hic autem occurrit casus imprimis memorabilis, quo sumitur $P = x^{k-n} + x^{k+n}$, quem in sequente Problemate speciali seorsim euoluamus.

Problema speciale.

§. 19. *Proposita formula differentiali* $\frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$ *eius totum integrale euoluere.*

Solutio.

Cum hic sit $P = x^{k-n} + x^{k+n}$, si statuamus

$x\,x - 2x \cos.\omega + 1 = 0$, fiet

$$P = \frac{x - \cos.\omega}{\sin.\omega}(\sin.(k-n)\,\omega) + \sin.(k-n)\,\omega + \cos.(k-n)\,\omega,$$

vnde sponte se produnt litterae F et G; cum autem in genere sit

$$\sin.p + \sin.q = 2\sin.\tfrac{p+q}{2}.\cos.\tfrac{p-q}{2} \text{ et}$$

$$\cos.p + \cos.q = 2\cos.\tfrac{p+q}{2}.\cos.\tfrac{p-q}{2},$$

facta hac reductione reperietur:

$$F = 2\sin.k\,\omega\cos.n\,\omega \text{ et } G = 2\cos.k\,\omega\cos.n\,\omega.$$

Cum autem in genere sit

$$\omega = \tfrac{(2i-1)\pi}{2k}, \text{ erit } \sin.k\,\omega = \sin.\tfrac{(2i-1)\pi}{2},$$

cuius valor est vel $+1$, vel -1; vtrumuis autem locum habeat, semper erit $\cos.k\,\omega = 0$, ita vt sit

$$F = 2\sin.\tfrac{(2i-1)\pi}{2}\cos.n\tfrac{(2i-1)\pi}{2k} \text{ et } G = 0\cos.;$$

quibus

quibus valoribus inuentis pars integralis ex hoc factore generali oriunda erit

$$\frac{2}{k}\text{ fin.}\frac{(2i-1)\pi}{2}\text{ cof.}\frac{(2i-1)n\pi}{2k}\text{ A tang.}\frac{x\text{ fin.}\frac{(2i-1)\pi}{2k}}{1-x\text{ cof.}\frac{(2i-1)\pi}{2k}}.$$

Hinc ergo, si loco i successiue scribamus valores 1, 2, 3, 4, etc. vsque ad k, totum integrale quaesitum sequenti forma exprimetur:

$$\frac{2}{k}\text{ cof.}\frac{n\pi}{2k}\text{ A tang.}\frac{x\text{ fin.}\frac{\pi}{2k}}{1-x\text{ cof.}\frac{\pi}{2k}}$$
$$-\frac{2}{k}\text{ cof.}\frac{3n\pi}{2k}\text{ A tang.}\frac{x\text{ fin.}\frac{3\pi}{2k}}{1-x\text{ cof.}\frac{3\pi}{2k}}$$
$$+\frac{2}{k}\text{ cof.}\frac{5nk}{2k}\text{ A tang.}\frac{x\text{ fin.}\frac{5\pi}{2k}}{1-x\text{ cof.}\frac{5\pi}{2k}}$$
$$-\frac{2}{k}\text{ cof.}\frac{7n\pi}{2k}\text{ A tang.}\frac{x\text{ fin.}\frac{7\pi}{2k}}{1-x\text{ cof.}\frac{7\pi}{2k}}$$
$$+\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}$$
$$-\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}$$
$$+\frac{2}{k}\text{ fin.}\frac{(2k-1)\pi}{2k}\text{ cof.}\frac{(2k-1)n\pi}{2k}\text{ A tg.}\frac{x\text{ fin.}\frac{(2k-1)\pi}{2k}}{1-x\text{ cof.}\frac{(2k-1)\pi}{2k}},$$

vbi imprimis notatu dignum vsu venit, vt omnes partes logarithmicae se mutuo destruxerint.

Corollarium 1.

§. 20. Quod si ergo sumamus $n=0$, ita vt formula integranda fit $\int\frac{2x^k\,dx}{1+x^{2k}}$, eius integrale hoc modo exprimetur:

$$\frac{2}{k}\,\text{A.tang.}\,\frac{x\,\text{fin.}\,\frac{\pi}{2k}}{1-x\,\text{cof.}\,\frac{\pi}{2k}} - \frac{2}{k}\,\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{fin.}\,\frac{3\pi}{2k}}{1-x\,\text{cof.}\,\frac{3\pi}{2k}}$$

$$+\frac{2}{k}\,\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{fin.}\,\frac{5\pi}{2k}}{1-x\,\text{cof.}\,\frac{5\pi}{2k}} + \ldots\ldots$$

$$+\frac{2}{k}\,\text{fin.}\,\frac{(2k-1)\pi}{2k}\,\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{fin.}\,\frac{(2k-1)\pi}{2k}}{1-x\,\text{cof.}\,\frac{(2k-1)\pi}{2k}}.$$

At posito $x^k = z$, ob $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{kz}$, formula integralis inducet hanc formam: $\int \frac{2\,dz}{k(1+zz)}$, cuius integrale manifesto est

$$\tfrac{2}{k}\,\text{A tang.}\,z = \tfrac{2}{k}\,\text{A tang.}\,x^k,$$

vnde sequitur fore

$$\text{A tang.}\,x^k = \text{A tang.}\,\frac{x\,\text{fin.}\,\frac{\pi}{2k}}{1-x\,\text{cof.}\,\frac{\pi}{2k}} - \text{A tang.}\,\frac{x\,\text{fin.}\,\frac{3\pi}{2k}}{1-x\,\text{cof.}\,\frac{3\pi}{2k}}$$

$$+\,\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{fin.}\,\frac{5\pi}{2k}}{1-x\,\text{cof.}\,\frac{5\pi}{2k}} - \ldots\ldots$$

$$\pm\,\text{fin.}\,\frac{(2k-1)\pi}{2k}\,\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{fin.}\,\frac{(2k-1)\pi}{2k}}{1-x\,\text{cof.}\,\frac{(2k-1)\pi}{2k}},$$

quod sane est Theorema maxima attentione dignum.

Corollarium 2.

§. 21. Ad hoc Theorema illustrandum sumamus $k = 1$, et ob fin. $\frac{\pi}{2} = 1$ et cof. $\frac{\pi}{2} = 0$ prodit manifesto

$$\text{A tang.}\,x = \text{A tang.}\,x.$$

At sumto $k = 2$, ob fin. $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cof. $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, fin. $\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et cof. $\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, fiet

$$\text{A tang.}\,x\sqrt{2} = \text{A tang.}\,\frac{x}{\sqrt{2}-x} - \text{A tang.}\,\frac{x}{\sqrt{2}+x}.$$

Cum

Cum autem in genere ſit

$$\text{A tang. } p - \text{A tang. } q = \text{A tang. } \frac{p-q}{1+pq},$$

hoc caſu erit

$$p = \frac{x}{\sqrt{2}-x} \text{ et } q = \frac{x}{\sqrt{2}+x}, \text{ ideoque}$$

$$p - q = \frac{2xx}{2-xx} \text{ et } 1 + pq = \frac{2}{2-xx},$$

vnde manifeſto prodit

$$\text{A tang. } xx = \text{A tang. } x\,x.$$

Sumamus porro $k = 3$, et ob

$$\text{ſin. } \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2},\ \text{coſ. } \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\ \text{ſin. } \tfrac{2\pi}{6} = 1,\ \text{coſ. } \tfrac{2\pi}{6} = 0,$$

$$\text{ſin. } \tfrac{5\pi}{6} = \tfrac{1}{2} \text{ et coſ. } \tfrac{5\pi}{6} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \text{ reperietur}$$

$$\text{A tang. } x^3 = \text{A tang. } \frac{x}{2-x\sqrt{3}} - \text{tang. } x + \text{A tang. } \frac{x}{2+x\sqrt{3}},$$

vbi per reductionem ſuperiorem Arcus primus et tertius iunctim ſumti, ob

$$p = \frac{x}{2-x\sqrt{3}} \text{ et } q = \frac{-x}{2+x\sqrt{3}},$$

praebent A tang. $\frac{x}{1-xx}$, a quo ſi ſubtrahatur A tang. x, remanebit A tang. x^3.

Scholion.

§. 22. Ceterum veritas huius theorematis in genere comodiſſime ſumendis differentialibus oſtendi poteſt. Cum enim ſit

$$d.\,\text{A tang. } x^k = \frac{k\,x^{k-1}\,dx}{1+x^{2k}} \text{ et}$$

$$d.\,\text{A tang. } \frac{x\,\text{ſin. }\omega}{1-x\,\text{coſ. }\omega} = \frac{dx\,\text{ſin. }\omega}{1-2x\,\text{coſ. }\omega + xx},$$

ſi loco ω valores debiti ſucceſſiue ſubſtituantur et per dx diuidatur, reſultabit ſequens aequatio:

$$\frac{k\,x^{k-1}}{1+x^{2k}} = \frac{\text{fin.}\frac{\pi}{2k}}{1-2x\,\text{cof.}\frac{\pi}{2k}+xx} - \frac{\text{fin.}\frac{2\pi}{2k}}{1-2x\,\text{cof.}\frac{2\pi}{2k}+xx},$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;. \pm \frac{\text{fin.}\frac{(2k-1)\pi}{2k}}{1-2x\,\text{cof.}\frac{(2k-1)\pi}{2k}+xx},$$

quae ſunt eae ipſae fractiones partiales, in quas functio fracta $\frac{k\,x^{k-1}}{1+x^{2k}}$ reſoluitur. Ceterum cum in hac integratione omnes logarithmi exceſſerint, duplex quaeſtio circa integrale inuentum inſtitui poteſt, altera, qua quaeritur eius valor caſu $x = \infty$, altera vero caſu quo ſumitur $x = 1$.

Quaeſtio prior.

§. 23. *Propoſita formula differentiali* $\frac{x^{k-n}+x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, *eius integralis valorem inueſtigare, qui oritur ſi poſt integrationem ponitur* $x = \infty$.

Solutio.

Cum quilibet arcus in expreſſione integralis inuenti §. 19 in genere ſit huiusmodi: A tang. $\frac{x\,\text{ſin. }\omega}{1-x\,\text{cof. }\omega}$, ſi ſtatuatur $x = \infty$, is hanc induet formam: A tang. $(-\text{tang.}\omega)$. Quia autem $-\text{tang. }\omega = +\text{tang. }(\pi-\omega)$, iſte arcus fiet $= \pi - \omega$; quare ſi loco ω ſucceſſiue valores debitos ſubſtituamus, integrale quaeſitum ſequenti ſerie exprimetur:

$$\frac{2}{k}\left(\pi-\frac{\pi}{2k}\right)\text{cof.}\frac{n\pi}{2k} - \frac{2}{k}\left(\pi-\frac{3\pi}{2k}\right)\text{cof.}\frac{3n\pi}{2k}$$
$$+ \frac{2}{k}\left(\pi-\frac{5\pi}{2k}\right)\text{cof.}\frac{5n\pi}{2k} - \frac{2}{k}\left(\pi-\frac{7\pi}{2k}\right)\text{cof.}\frac{7n\pi}{2k}$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\pm\frac{2}{k}\left(\pi-\frac{(2k-1)\pi}{2k}\right)\text{cof.}\frac{(2k-1)n\pi}{2k},$$

cuius

cuius vltimum membrum habebit signum $+$, quoties fuerit $2k-1$ numerus formae $4\alpha+1$, siue $k=2\alpha+1$, ideoque k numerus impar; at vero signum $-$ valebit, si $2k-1$ fuerit formae $4\alpha-1$, siue $k=2\alpha$, ideoque numerus par. Ad valorem huius seriei inueniendum ponamus:

$$S=(1-\tfrac{1}{2k})\cos.\tfrac{n\pi}{2k}-(1-\tfrac{3}{2k})\cos.\tfrac{3n\pi}{2k}+(1-\tfrac{5}{2k})\cos.\tfrac{5n\pi}{2k}$$
$$-(1-\tfrac{7}{2k})\cos.\tfrac{7n\pi}{2k}+(1-\tfrac{9}{2k})\cos.\tfrac{9n\pi}{2k}$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ \pm(1-\tfrac{(2k-1)}{2k})\cos.\tfrac{(2k-1)n\pi}{2k},$$

ita vt valor noster quaesitus fit $\frac{2\pi S}{k}$. Quo nunc valorem ipsius S inuestigemus, multiplicemus vtrinque per $2\cos.\frac{n\pi}{2k}$, et cum in genere sit

$$2\cos.\tfrac{n\pi}{2k}\cos.\tfrac{(2i-1)n\pi}{2k}=\cos.\tfrac{in\pi}{k}+\cos.\tfrac{(i-1)n\pi}{k},$$

adhibita ista reductione reperietur

$$\left.\begin{array}{r}+(1-\frac{1}{2k})\cos.\frac{n\pi}{k}-(1-\frac{3}{2k})\cos.\frac{2n\pi}{k}\\ +(1-\frac{3}{2k})-(1-\frac{5}{2k})\cos.\frac{n\pi}{k}+(1-\frac{5}{2k})\cos.\frac{2n\pi}{k}\\ +(1-\frac{5}{2k})\cos.\frac{3n\pi}{k}-(1-\frac{7}{2k})\cos.\frac{4n\pi}{k}+\text{etc.}\\ -(1-\frac{7}{2k})\cos.\frac{3n\pi}{k}+(1-\frac{9}{2k})\cos.\frac{4n\pi}{k}-\text{etc.}\end{array}\right\}$$

vbi patet, quemlibet terminum superiorem cum sequente inferiori in vnicum coalescere, ita vt tantum primus inferior, qui est $(1-\frac{1}{4k})$, et vltimus superior, qui est $+\frac{1}{2k}\cos.n\pi$, solitarii relinquantur; facta ergo hac contractione reperietur:

$$2S\cos.\tfrac{n\pi}{2k}=1-\tfrac{1}{2k}\pm\tfrac{1}{2k}\cos.n\pi+\tfrac{1}{k}\cos.\tfrac{n\pi}{k}-\tfrac{1}{k}\cos.\tfrac{2n\pi}{k}$$
$$+\tfrac{1}{k}\cos.\tfrac{3n\pi}{n}-\ -\ -\ -\ -\ \mp\tfrac{1}{k}\cos.\tfrac{(k-1)n\pi}{k},$$

vbi ſignum ſuperius valet, ſi k fuerit numerus impar, inferius autem ſi k fuerit numerus par. Ponamus porro ad hanc ſeriem ſummandam

$$T = \text{cof.}\frac{n\pi}{k} - \text{cof.}\frac{2n\pi}{k} + \text{cof.}\frac{3n\pi}{k} - \text{cof.}\frac{4n\pi}{k}$$
$$+ \ldots\ldots \pm \text{cof.}\frac{(k-1)n\pi}{k},$$

ita vt hoc valore T inuento futurum ſit

$$2S\,\text{cof.}\frac{n\pi}{2k} = 1 - \frac{1}{2k} \pm \frac{1}{2k}\,\text{cof.}\,n\pi + \frac{T}{k}.$$

Multiplicemus ſimili modo vtrinque per $2\,\text{cof.}\frac{n\pi}{2k}$, et in ſubſidium vocata eadem reductione reperietur:

$$2T\,\text{cof.}\frac{n\pi}{2k} = \begin{cases} + \text{cof.}\frac{2n\pi}{2k} - \text{cof.}\frac{5n\pi}{2k} \\ + \text{cof.}\frac{n\pi}{2k} - \text{cof.}\frac{3n\pi}{2k} + \text{cof.}\frac{5n\pi}{2k} \\ + \text{cof.}\frac{7n\pi}{2k} \ldots\ldots \pm \text{cof.}\frac{(2k-1)n\pi}{2k} \\ - \text{cof.}\frac{7n\pi}{2k} \quad \ldots\ldots \end{cases}$$

vbi omnes termini ſe mutuo deſtruunt, praeter primum inferiorem et vltimum ſuperiorem, ita vt obtineamus:

$$2T\,\text{cof.}\frac{n\pi}{2k} = \text{cof.}\frac{n\pi}{2k} \mp \text{cof.}\frac{(2k-1)n\pi}{2k}.$$

Quia autem

$$\frac{(2k-1)}{2k}n\pi = n\pi - \frac{n\pi}{2k},\ \text{erit}$$
$$\text{cof.}\frac{(2k-1)n\pi}{2k} = \text{cof.}\,n\pi\,\text{cof.}\frac{n\pi}{2k} + \text{fin.}\,n\pi\,\text{fin.}\frac{n\pi}{2k},$$

quoniam vero n ſupponitur numerus integer, erit

$$\text{fin.}\,n\pi = 0,\ \text{ideoque}$$
$$2T\,\text{cof.}\frac{n\pi}{2k} = \text{cof.}\frac{n\pi}{2k} \mp \text{cof.}\,n\pi\,\text{cof.}\frac{n\pi}{2k},$$

vnde fit

$$T = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\,\text{cof.}\,n\pi,\ \text{quo valore ſubſtituto fiet}$$
$$2S\,\text{cof.}\frac{n\pi}{2k} = 1,\ \text{conſequenter}$$

S

$S = \frac{1}{2 \cos. \frac{n\pi}{2k}}$, ideoque valor noſter quaeſitus erit

$\frac{\pi}{k \cos. \frac{n\pi}{2k}}$, vnde naſcitur ſequens

Theorema 1.

§. 24. *Iſta formula integralis:*

$$\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$$

a termino $x = 0$ *vsque ad terminum* $x = \infty$ *extenſa, producit hunc valorem:* $\frac{\pi}{k \cos. \frac{n\pi}{2k}}$, cuius demonſtratio ex praecedente paragrapho liquet. Huic adiungi poteſt ſequens *Theorema*, quod prorſus ſingulari demonſtratione ex iſto derivare licet.

Theorema 2.

§. 25. *Si tam iſta formula integralis:* $\int \frac{x^{k-n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, *quam haec:* $\int \frac{x^{k+n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, *a termino* $x = 0$ *vsque ad* $x = \infty$ *extendatur, vtraque producet eandem ſummam, quae eſt*

$$\frac{\pi}{2k \cos. \frac{n\pi}{2k}}.$$

Demonſtratio.

Ponatur $S = \int \frac{x^{k-n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, ſiquidem integratio a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = \infty$ extendatur, ac pona-

ponatur $x = \frac{1}{z}$, ita vt iam integratio abſolui debeat a termino ∞ vsque ad o, et ob $\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z}$ habebitur nunc $-\int \frac{z^{-k+n}}{1+z^{-2k}} \cdot \frac{dz}{z}$, quae, ſi numerator ac denominator multiplicetur per z^{2k}, abit in hanc:

$$S = -\int \frac{z^{k+n}}{1+z^{2k}} \cdot \frac{dz}{z}$$

integratione a termino $z = \infty$ vsque ad $z = 0$ extenſa. Hinc permutatis terminis integrationis erit

$$S = \int \frac{z^{k+n}}{1+z^{2k}} \cdot \frac{dz}{z}$$

a termino $z = 0$ vsque ad $z = \infty$, vnde ſi loco z ſcribatur x, manifeſtum eſt, vtramque formulam, a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extenſam, eandem habere ſummam S. Cum igitur ambae hae formulae iunctae praebeant ſummam $2S = \frac{\pi}{k} \text{ cof.} \frac{n\pi}{2k}$, erit vtique vtriusque formulae valor ſeorſim $S = \frac{\pi}{2k \text{ cof.} \frac{n\pi}{2k}}$.

Quaeſtio altera.

§. 26. *Propoſita formula differentiali*

$$\frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$$

eius integralis valorem inueſtigare, qui oritur, ſi poſt integrationem ponatur $x = 1$.

Solutio.

Cum in forma integralis generali quilibet terminus inuentus ſit $\frac{2}{n} \text{ cof. } n\omega \Lambda \text{ tang.} \frac{x \text{ ſin. } \omega}{1 - x \text{ cof. } \omega}$, fiat hic $x = 1$

ac

ac prodibit $\frac{2}{k}\cos. n\omega$ A tang. $\frac{\sin.\omega}{1-\cos.\omega}$, quae forma ob

$$\sin.\omega = 2\sin.\tfrac{1}{2}\omega\cos.\tfrac{1}{2}\omega \text{ et } 1-\cos.\omega = 2\sin.\tfrac{1}{2}\omega^2$$

abit in hanc:

$$\frac{2}{k}\cos. n\omega \text{ A tang. } \frac{\cos.\frac{1}{2}\omega}{\sin.\frac{1}{2}\omega}$$

quae, cum sit

$$\frac{\cos.\frac{1}{2}\omega}{\sin.\frac{1}{2}\omega} = \cot.\tfrac{1}{2}\omega = \text{tang.}\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{1}{2}\omega\right),$$

porro transformatur in hanc:

$$\tfrac{2}{k}\cos. n\omega\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{1}{2}\omega\right) = \tfrac{1}{k}(\pi-\omega)\cos. n\omega.$$

Quod si igitur hic loco ω succesſiue ſcribamus eius valores, qui ſunt $\frac{\pi}{2k}$, $\frac{3\pi}{2k}$, $\frac{5\pi}{2k}$, vsque ad $\frac{(2k-1)\pi}{2k}$, valor integralis quaeſitus exprimetur per hanc progreſſionem:

$$\tfrac{1}{k}\left(\pi-\tfrac{\pi}{2k}\right)\cos.\tfrac{n\pi}{2k} - \tfrac{1}{k}\left(\pi-\tfrac{3\pi}{2k}\right)\cos.\tfrac{3n\pi}{2k} + \tfrac{1}{k}\left(\pi-\tfrac{5\pi}{2k}\right)\cos.\tfrac{5n\pi}{2k}$$
$$- \tfrac{1}{k}\left(\pi-\tfrac{7\pi}{2k}\right)\cos.\tfrac{7n\pi}{2k} - - - - - \pm \tfrac{1}{k}\left(\pi-\tfrac{(2k-1)}{2k}\pi\right)\cos.\tfrac{(2k-1)n\pi}{2k}$$

vbi ſignorum ambiguorum ſuperius valet ſi k fuerit numerus impar, inferius vero ſi par. Comparemus hanc expreſſionem cum ea, ad quam in quaeſtione praecedente eſt peruentum, ac reperiemus, hanc illius praecise eſſe ſemiſſem, vnde eius valor erit $\frac{\pi}{2k\cos.\frac{n\pi}{2k}}$, ſicque habebitur ſequens

Theorema.

§. 27. *Iſta formula integralis:* $\int \frac{x^{k-n}+x^{k+n}}{1+x^{2k}}\cdot\frac{dx}{x^n}$ *a termino* $x=0$ *vsque ad terminum* $x=1$ *extenſa, producet hunc valorem:* $\frac{\pi}{2k\cos.\frac{n\pi}{2k}}$.

Corollarium.

§. 28. Cum igitur huius formulae integrale, a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extensum, sit dimidium eius, quod a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extenditur, sequitur, si eadem formula integralis a termino $x = 1$ vsque ad $x = \infty$ extendatur, eius valorem quoque fore $\frac{\pi}{2k \cos. \frac{n\pi}{2k}}$, praeterea vero vtriusque valor aequabitur huic formulae integrali: $\int \frac{x^{k \pm n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, siquidem ab $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extendatur.

Problema particulare II.

§. 29, *Si sumatur* $Q = 1 - x^{2k}$, *inuestigare integrale huius formulae differentialis:* $\frac{P\,dx}{(1-x)^{2k}}$, *vbi quidem* $\frac{P}{x}$ *sit functio integra, in qua nullae potestates altiores occurrant quam exponentis* $2k$, *ne scilicet ista fractio euadat spuria.*

Solutio.

Cum sit $Q = 1 - x^{2k}$, statim duo eius habentur factores simplices reales, qui sunt $1 - x$ et $1 + x$, quare partes integrales ex iis oriundas primum inuestigemus. Ponamus igitur pro factore $1 - x$ fractionem

$$\frac{P}{x(1-x^{2k})} = \frac{\alpha}{1-x} + R,$$

vbi R complectitur omnes reliquas partes, vnde per $1 - x$ multiplicando habebimus

$$\frac{P(1-x)}{x(1-x^{2k})} = \alpha + R(1-x);$$

quare ſi faciamus $x = 1$, nanciſcemur

$$\alpha = \frac{P}{x} \cdot \frac{1-x}{1-x^{2k}},$$

cuius poſterioris fractionis, poſito $x = 1$, tam numerator quam denominator euaneſcit, hinc eorum loco ſcribamus eorum differentialia, fietque

$$\alpha = \frac{P}{x} \cdot \frac{1}{2k\,x^{2k-1}}.$$

Fiat igitur nunc $x = 1$, quo caſu abeat P in B, ac prodibit $\alpha = \frac{B}{2k}$; ex fractione autem partiali $\frac{\alpha}{1-x}$ porro reperitur pars integralis inde nata

$$= -\alpha\, l(1-x) = \frac{-B}{2k}\, l(1-x).$$

Pro altero factore $1+x$ faciamus ſimili modo

$$\frac{P}{x(1-x^{2k})} = \frac{\beta}{1+x} + R,$$

vnde per $1+x$ multiplicando fit

$$\frac{P(1+x)}{x(1-x^{2k})} = \beta + R(1+x),$$

quare ſi faciamus $x = -1$, erit

$$\beta = \frac{P}{x} \cdot \frac{1+x}{1-x^{2k}},$$

vbi in poſteriore fractione differentialia tam ſupra quam infra ſcribantur, vt prodeat

$$\beta = \frac{P}{x} \cdot \frac{1}{-2k\,x^{2k-1}} = \frac{-P}{2k\,x^{2k}} = \frac{-P}{2k},$$

posito scilicet $x = -1$. Ponamus ergo, facto $x = -1$, functionem P abire in functionem C, fietque $\beta = -\frac{C}{2k}$, et ex fractione partiali $\frac{\beta}{1+x}$, obtinebitur pars inde nata integralis $\beta l(1+x) = -\frac{C}{2k} l(1+x)$, sicque ex ambobus factoribus $(1+x)$ et $(1-x)$ nascuntur hae duae partes integrales: $-\frac{B}{2k} l(1-x) - \frac{C}{2k} l(1+x)$.

His expeditis sit formulae $1 - x^{2k}$ factor trinominalis quicunque $1 - 2x \cos.\omega + xx$, quo facto $= 0$, ista formula $1 - x^{2k}$ induet hanc formam:

$$1 - \frac{(x - \cos.\omega)}{\sin.\omega} \sin. 2k\omega - \cos. 2k\omega,$$

quae formula, cum debeat euanescere, has suppeditat conditiones:

1°. $\sin. 2k\omega = 0$ et 2°. $\cos. 2k\omega = 1$;

ex posteriore statim intelligitur angulum ω sequentes valores accipere posse:

1°. $\omega = 0$, 2°. $\omega = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$, 3°. $\omega = \frac{4\pi}{2k} = \frac{\pi}{2k}$,

et in genere $\omega = \frac{i\pi}{k}$. Quia igitur numerus horum valorum debet esse $= k$, primus autem $\omega = 0$ tantum factori simplici respondet, numerus valorum debet sumi $k+1$, ita vt iam vltimus futurus sit $\frac{k\pi}{k} = \pi$, vnde alter factor simplex $1+x$ nascitur; hoc autem modo simul primae conditioni satisfit, qua esse debet $\sin. 2k\omega = 0$. Nunc consideremus factorem generalem $xx - 2x \cos.\omega + 1$, quo posito $= 0$ fiat

$$P = \frac{F(x - \cos.\omega)}{\sin.\omega} + G, \text{ eritque } \frac{x\,dQ}{dx} = -2k x^{2k};$$

at vero iam vidimus, tum fieri $x^{2k} = 1$ sicque $\frac{x\,dQ}{dx} = -2k$,

pro

pro qua forma in genere posuimus $\frac{f(x-\cos.\omega)}{\sin.\omega}+g$, quo circa pro nostro casu erit $f=0$ et $g=-2k$. Cum igitur pro hoc factore in genere inuenta sit ista pars integralis:

$$\frac{2(Ff+Gg)}{ff+gg}\,lV(xx-2x\cos.\omega+1) + \frac{2(fG-Fg)}{ff+gg}\,\text{A tang.}\,\frac{x\sin.\omega}{1-x\cos.\omega},$$

erit ista pars nostro casu

$$-\frac{G}{k}\,lV(xx-2x\cos.\omega+1)+\frac{F}{k}\,\text{A tang.}\,\frac{x\sin.\omega}{1-x\cos.\omega},$$

consequenter si loco ω succesiue scribantur valores indicati, scilicet $\omega=0$, $\omega=\frac{\pi}{k}$, $\omega=\frac{2\pi}{k}$, vsque ad $\omega=(k-i)\frac{\pi}{k}$, et omnes istae partes in vnam summam colligantur, obtinebitur totum integrale formulae propositae. Hic autem probe obseruandum est, ex parte prima et vltima eas ipsas partes oriri, quas iam pro valoribus $(1-x)$ et $(1+x)$ assignauimus, quare eas penitus omitti conueniet.

Corollarium 1.

§. 30. Quodsi numerator P fuerit potestas simplex ipsius x, puta x^m, existente $m>1$ et $m<2k$, vt formula integranda sit $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^{2k}}$, pro factoribus simplicibus $1-x$ et $1+x$ erit $B=+1$ et $C=(-1)^m$, vnde partes integralis hinc natae erunt

$$\frac{-1}{2k}\,l(1-x)-\frac{(-1)^m}{2k}\,l(1+x).$$

Pro reliquis vero partibus erit $F=\sin.m\omega$ et $G=\cos.m\omega$, vnde quaelibet portio integralis induet hanc formam:

$$-\frac{\gamma l. m\omega}{k} l V(xx-2x\cos.\omega+1)+\frac{\sin. m\omega}{k} A\tang.\frac{x\sin.\omega}{1-x\cos.\omega}$$

vbi valores pro ω ſubſtituendi ſunt

$$\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k} \ldots \frac{(k-1)\pi}{k}.$$

Corollarium 2.

§. 31. Si numerator P pluribus huiusmodi terminis conſtet, vt ſit $P = a x^{\alpha} + b x^{\beta} + c x^{\gamma} +$ etc. integratio maiore difficultate non laborat; erit enim

$$F = a \sin.\alpha\omega + b \sin.\beta\omega + c \sin.\gamma\omega + \text{etc. et}$$

$$G = a \cos.\alpha\omega + b \cos.\beta\omega + c \cos.\gamma\omega + \text{etc.}$$

hincque totum integrale facile expedietur.

Scholion.

§. 32. Caſus prae ceteris memoratu dignus, qui hic occurrit eſt, quo ſtatuitur $P = x^{k-n} - x^{k+n}$, quippe quo omnes partes logarithmicae ſe mutuo tollere reperiuntur, vnde eum in ſequente Problemate euoluamus.

Problema ſpeciale.

§. 33. *Propoſita formula differentiali* $\frac{x^{k-n} - x^{k+n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$ *eius totum integrale inueſtigare.*

Solutio.

Quia hic eſt $P = x^{k-n} - x^{k+n} = x^{k-n}(1 - x^{2n})$, ob n numerum integrum poſito tam $x = 1$ quam $x = -1$ iſte valor euaneſcet, vnde fiet tam $B = 0$ quam $C = 0$, ſicque partes integrales ex factoribus ſimplicibus natae ſponte

ſponte euaneſcunt. Pro factore autem duplici quocunque

$$1 - 2x \cos.\omega + xx,$$

eo facto $= 0$ reperietur:

$$P = \frac{z - \cos.\omega}{\sin.\omega}(\sin.(k-n)\omega - \sin.(k+n)\omega) + \cos.(k-n)\omega - \cos.(k-n)\omega,$$

hincque colligitur:

$$F = \sin.(k-n)\omega - \sin.(k+n)\omega \text{ et}$$
$$G = \cos.(k-n)\omega - \cos.(k+n)\omega.$$

Cum autem in genere ſit

$$\sin.p - \sin.q = 2\sin.\frac{p-q}{2}\cos.\frac{p+q}{2} \text{ et}$$
$$\cos.p - \cos.q = 2\sin.\frac{q-p}{2}\sin.\frac{p+q}{2}, \text{ ob}$$
$$p = (k-n)\omega \text{ et } q = (k+n)\omega \text{ erit}$$
$$F = -2\sin.n\omega\cos.k\omega \text{ et } G = 2\sin.n\omega\sin.k\omega.$$

Eſt vero vti vidimus in genere $\omega = \frac{i\pi}{k}$, vnde fit

$$\sin.k\omega = \sin.i\pi = 0 \text{ et } \cos.k\omega = \pm 1,$$

ſcilicet valebit $+1$, ſi i eſt numerus par, et -1 ſi i impar. Ad hanc autem ambiguitatem euitandam retineamus $\cos.k\omega$, atque habebimus

$$F = -2\sin.n\omega\cos.k\omega \text{ et } G = 0.$$

Ex his igitur pars integralis quaecunque in genere erit:

$$-\frac{2\sin.n\omega\cos.k\omega}{k} A \operatorname{tang}.\frac{x\sin.\omega}{1 - x\cos.\omega},$$

vbi tantum opus eſt loco ω valores indicatos ſucceſſiue ſubſtitui; et quia pro primo $\omega = 0$ et vltimo $\omega = \pi$ partes integrales ſponte euaneſcunt, perinde eſt ſiue valores primus et vltimus reiiciantur ſiue retineantur, quamobrem totum integrale quaeſitum ſequenti modo exprimetur:

$$+\frac{2}{k}\text{ fin.}\frac{n\pi}{k}\text{ A tang.}\frac{x\text{ fin.}\frac{\pi}{k}}{1-x\text{ cof.}\frac{\pi}{k}}$$

$$-\frac{2}{k}\text{ fin.}\frac{2n\pi}{k}\text{ A tang.}\frac{x\text{ fin.}\frac{2\pi}{k}}{1-x\text{ cof.}\frac{2\pi}{k}}$$

$$+\frac{2}{k}\text{ fin.}\frac{3n\pi}{k}\text{ A tag.}\frac{x\text{ fin.}\frac{3\pi}{k}}{1-x\text{ cof.}\frac{3\pi}{k}}$$

$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$+\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$\pm\frac{2}{k}\text{ fin.}\frac{(k-1)n\pi}{k}\text{ A tang.}\frac{x\text{ fin.}\frac{(k-1)\pi}{k}}{1-x\text{ cof.}\frac{(k-1)\pi}{k}},$$

vbi ſignum ſuperius valet ſi n fuerit numerus par, inferius vero ſi impar.

Corollarium.

§. 34. Si hic ſumere velimus $n=0$, formula integranda ſponte euaneſcit, ita vt hic nihil memoratu dignum reſultet, vnde in valores huius integralis pro caſibus $x=\infty$ et $x=1$ inquiramus.

Quaeſtio prior.

§. 35. *Propoſita formula differentiali*

$$\frac{x^{k-n}-x^{k+n}}{1-x^{2k}}\cdot\frac{dx}{x},$$

eius valorem integralem inueſtigare, qui oritur ſi poſt integrationem ponitur $x=\infty$.

Solutio.

Cum arcuum qui hic occurrunt forma generalis ſit A tang. $\frac{x\text{ ſin.}\omega}{1-x\text{ coſ.}\omega}$, ea, poſito $x=\infty$, vti ante vidimus, abit in $\pi-\omega$, vnde litterae ω valores ſuos ordine tribuendo

valor

valor quaesitus nostrae formulae integralis sequenti progressione exprimetur:

$$\tfrac{2}{k}(\pi-\tfrac{\pi}{k})\sin.\tfrac{n\pi}{k}-\tfrac{2}{k}(\pi-\tfrac{2\pi}{k})\sin.\tfrac{2n\pi}{k}+\tfrac{2}{k}(\pi-\tfrac{3\pi}{k})\sin.\tfrac{3n\pi}{k}$$
$$-\tfrac{2}{k}(\pi-\tfrac{4\pi}{k})\sin.\tfrac{4n\pi}{k}+\ldots\ldots\pm\tfrac{2}{k}(\pi-\tfrac{(k-1)\pi}{k})\sin.\tfrac{(k-1)n\pi}{k}.$$

Ad huius valorem inuestigandum ponamus:

$$S=(1-\tfrac{1}{k})\sin.\tfrac{n\pi}{k}-(1-\tfrac{2}{k})\sin.\tfrac{2n\pi}{k}+(1-\tfrac{3}{k})\sin.\tfrac{3n\pi}{k}$$
$$-(1-\tfrac{4}{k})\sin.\tfrac{4n\pi}{k}.\ldots\ldots\pm(1-\tfrac{(k-1)}{k})\sin.\tfrac{(k-1)n\pi}{k}$$

ita vt valor quem quaerimus sit $\frac{2\pi S}{k}$. Multiplicemus igitur vt hactenus vtrinque per $2\cos.\frac{n\pi}{2k}$, et cum in genere sit

$$2\sin.\tfrac{in\pi}{k}\cos.\tfrac{n\pi}{2k}=\sin.\tfrac{(2i+1)n\pi}{2k}+\sin.\tfrac{(2i-1)n\pi}{2k},$$

facta hac reductione perueniemus ad sequentem expressionem:

$$2S\cos.\tfrac{n\pi}{2k}=\left\{\begin{array}{l}+(1-\frac{1}{k})\sin.\frac{3n\pi}{2k}-(1-\frac{2}{k})\sin.\frac{5n\pi}{2k}\\(1-\frac{1}{k})\sin.\frac{n\pi}{2k}-(1-\frac{2}{k})\sin.\frac{3n\pi}{2k}+(1-\frac{3}{k})\sin.\frac{5n\pi}{2k}\\+(1-\frac{3}{k})\sin.\frac{7n\pi}{2k}\ldots\pm(1-\frac{(k-3)}{k})\sin.\frac{(2k-3)n\pi}{2k}\\-(1-\frac{5}{k})\sin.\frac{7n\pi}{2k}\ldots\mp(1-\frac{(k-1)}{k})\sin.\frac{(2k-3)n\pi}{2k}\end{array}\right\}$$

vbi quilibet terminus superior cum sequente inferiori in vnum contrahi potest, vnde primum inferiorem cum vltimo superiori seorsim exhibeamus hoc modo:

$$2S\cos.\tfrac{n\pi}{2k}=(1-\tfrac{1}{k})\sin.\tfrac{n\pi}{2k}\pm\tfrac{1}{k}\sin.\tfrac{(2k-1)n\pi}{2k}$$
$$+\tfrac{1}{k}\sin.\tfrac{3n\pi}{2k}-\tfrac{1}{k}\sin.\tfrac{5n\pi}{2k}+\tfrac{1}{k}\sin.\tfrac{7n\pi}{2k}+\tfrac{1}{k}\sin.\tfrac{(2k-1)n\pi}{2k}.$$

Hoc igitur modo vltimus superior cum reliquis eandem legem sequitur, ita vt ponere liceat:

$$2S\cos.\tfrac{n\pi}{2k}=(1-\tfrac{1}{k})\sin.\tfrac{n\pi}{2k},$$
$$+\tfrac{1}{k}\sin.\tfrac{3n\pi}{2k}-\tfrac{1}{k}\sin.\tfrac{5n\pi}{2k}+\tfrac{1}{k}\sin.\tfrac{7n\pi}{2k}.\ldots\pm\tfrac{1}{k}\sin.\tfrac{(2k-1)n\pi}{2k}.$$

Statuamus porro

$$T = \text{fin.}\tfrac{3n\pi}{2k} - \text{fin.}\tfrac{5n\pi}{2k} + \text{fin.}\tfrac{7n\pi}{2k} - \ldots \mp \text{fin.}\tfrac{(2k-1)n\pi}{2k},$$

vt fit

$$2S\cos.\tfrac{n\pi}{2k} = (1 - \tfrac{1}{k})\,\text{fin.}\tfrac{n\pi}{2k} + \tfrac{T}{k}.$$

Iam iterum multiplicemus per $2\cos.\frac{n\pi}{2k}$, et adhibita eadem reductione reperiemus:

$$2T\cos.\tfrac{n\pi}{2k} = \text{fin.}\tfrac{2n\pi}{k} - \text{fin.}\tfrac{3n\pi}{k} + \text{fin.}\tfrac{4n\pi}{k} \ldots \mp \text{fin.}\,n\pi$$
$$+\text{fin.}\tfrac{n\pi}{k} - \text{fin.}\tfrac{2n\pi}{k} + \text{fin.}\tfrac{3n\pi}{k} - \text{fin.}\tfrac{4n\pi}{k} \quad \mp \text{fin.}\tfrac{(k-1)n\pi}{k},$$

vbi, deſtructis terminis qui ſe mutuo tollunt, obtinebitur:

$$2T\cos.\tfrac{n\pi}{2k} = \text{fin.}\tfrac{n\pi}{k} \mp \text{fin.}\,n\pi = \text{fin.}\tfrac{n\pi}{k},\ \text{ob } n\pi = 0.$$

Quia igitur eſt

$$\text{fin.}\tfrac{n\pi}{k} = 2\,\text{fin.}\tfrac{n\pi}{2k}\cos.\tfrac{n\pi}{2k},\ \text{erit } T = \text{fin.}\tfrac{n\pi}{2k},$$

quo valore ſubſtituto fiet

$$2S\cos.\tfrac{n\pi}{2k} = \text{fin.}\tfrac{n\pi}{2k},$$

ideoque $S = \frac{1}{2}\,\text{tang.}\frac{n\pi}{2k}$, conſequenter noſtrae formulae integralis, caſu $x = \infty$, valor erit $\frac{\pi}{k}\,\text{tang.}\frac{n\pi}{2k}$, vnde naſcitur ſequens

Theorema.

§. 36. *Iſta formula integralis*: $\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 - x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, *a termino* $x = 0$ *vsque ad terminum* $x = \infty$ *extenſa, producit hunc valorem*: $\frac{\pi}{k}\,\text{tang.}\frac{n\pi}{2k}$.

Scholion.

§. 37. Cum haec formula duabus conſtet partibus, ſi ſimili modo, vt ſupra factum eſt, in valorem vtrivsque ſcorſim inquirere velimus, vtriusque valor adeo imagina-

ginarius esse deprehendetur, id quod facile inde percipitur, quod posito $x = 1$ ipsa fractio iam in infinitum excrescat. Tractemus autem vt supra partem priorem, ponendo $S = \int \frac{x^{k-n}}{1-x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$, ac faciendo $x = \frac{1}{z}$, fiet

$$S = -\int \frac{z^{-k+n}}{1-z^{-2k}} \cdot \frac{dz}{z} = -\int \frac{z^{k+n}}{z^{2k}-1} \cdot \frac{dz}{z},$$

a termino $z = \infty$ vsque ad $z = 0$, ergo mutatis terminis integrationis erit

$$S = -\int \frac{z^{k+n}}{1-z^{2k}} \cdot \frac{dz}{z}$$

a termino $z = 0$ vsque ad $z = \infty$; vnde si loco z scribamus x et has formulas iungamus, erit

$$2S = \int \frac{x^{k-n} - x^{k+n}}{1-x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{k} \text{ tang. } \frac{n\pi}{2k}.$$

vnde prodiret $S = \frac{\pi}{2k}$ tang. $\frac{n\pi}{2k}$. Haec autem conclusio admitti nequit, quoniam nostra formula integralis eatenus tantum ad arcum circularem reduci poterit, quatenus numerator $x^{k-n} - x^{k+n}$ cum denominatore $1 - x^{2k}$ factorem communem habet $1 - xx$, qui ergo semper diuisionem tolli posset. Verum sumta tantum alterutra parte, iste factor $1 - xx$ ex denominatore non tollitur, ex eoque igitur necessario nasceretur pars integralis vel huius formae: $\alpha l \frac{1+x}{1-x}$, vel huius: $\alpha l(1-xx)$, quae vtraque forma, sumto $x = \infty$, fit imaginaria.

Quaeſtio altera.

§. 38. *Propoſita formula differentiali*
$\frac{x^{k-n} - x^{k+n}}{1 - x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$
eius integrale inueſtigare, quod oritur, ſi poſt integrationem ponitur $x = 1$.

Solutio.

Si in forma generali arcuum, quibus integrale exprimitur, quae eſt A tang. $\frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega}$, ponatur $x = 1$, prodit vt ante vidimus $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, qui valor cum ſit dimidius eius quem caſu praecedente habuimus, ſtatim patet, valorem noſtrum fore $\frac{\pi}{2k}$ tang. $\frac{n\pi}{2k}$, vnde naſcitur iſtud

Theorema.

§. 39. *Iſta formula integralis*: $\int \frac{x^{k-n} - x^{k+n}}{1 - x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$,
a termino $x = 0$ *vsque ad terminum* $x = 1$ *extenſa, producet hunc valorem*: $\frac{\pi}{2k}$ tang. $\frac{n\pi}{2k}$.

Corollarium.

§. 40. Hinc ſi eiusdem formulae integrale a termino $x = 1$ vsque ad $x = \infty$ extendatur, eius valor quoque erit $\frac{\pi}{2k}$ tang. $\frac{n\pi}{2k}$, quandoquidem hi duo valores iunctim ſumti valorem caſus praecedentis producere debent.

Problema particulare III.

§. 41. *Si ſumatur* $Q = 1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k}$, *inveſti-*

veſtigare integrale huius formulae differentialis:

$$\frac{P\,dx}{x(1+2x^k\cos.\eta+x^{2k})},$$

vbi quidem $\frac{P}{x}$ *ſit functio integra, in qua nullae poteſtates altiores occurrant quam exponentis* $2k$.

Solutio.

Quia denominator Q alios factores ſimplices, praeter imaginarios, non admittit, niſi caſu quo $\eta = 180°$, ſit eius factor trinomialis in genere $1 - 2x\cos.\omega + xx$, quo poſito $= 0$ fiet

$$Q = \frac{x-\cos.\omega}{\sin.\omega}(\sin.2k\omega + 2\cos.\eta\sin.k\omega) + \cos.2k\omega + 2\cos.\eta\cos.k\omega + 1,$$

quae forma, quia debet eſſe nihilo aequalis, poſtulat has duas conditiones:

I. $\sin.2k\omega + 2\cos.\eta\sin.k\omega = 0$ et

II. $\cos.2k\omega + 2\cos.\eta\cos.k\omega + 1 = 0$.

Cum igitur ſit

$\sin.2k\omega = 2\sin.k\omega\cos.k\omega$ et $\cos.2k\omega + 1 = 2\cos.k\omega^2$,

prior conditio dat

$$2\sin.k\omega(\cos.k\omega + \cos.\eta) = 0,$$

et ſecunda conditio

$$2\cos.k\omega(\cos.k\omega + \cos.\eta) = 0;$$

vtrique igitur conditioni ſatisfit ſimul, ſi fuerit

$$\cos.k\omega + \cos.\eta = 0,$$

quod quo facilius fieri poſſit ſumamus $\eta = \pi - \theta$, vt habeatur $\cos.k\omega = \cos.\theta$. Omnes autem anguli cum η co-

munem cosinum habentes sunt: ϑ, $2\pi \pm \vartheta$, $4\pi \pm \vartheta$, $6\pi \pm \vartheta$, et in genere $2i\pi \pm \vartheta$, quamobrem statuamus pro ω sequentes valores:

$$\omega = \frac{\vartheta}{k},\ \omega = \frac{2\pi \pm \vartheta}{k},\ \omega = \frac{4\pi \pm \vartheta}{k},\ \text{etc.}$$

et in genere $\omega = \frac{2i\pi \pm \vartheta}{k}$, quorum valorum numerus cum debeat esse $= k$, vltimus erit

$$\omega = \frac{2(k-1)\pi \pm \vartheta}{k},\ \text{siue}\ \omega = \frac{-2\pi \pm \vartheta}{k}.$$

His constitutis consideremus formulam $\frac{x\,d\,Q}{d\,x}$, quae erit

$$= 2k\,(x^k \cos.\,\eta + x^{2k}),$$

quae per conditionem

$$xx - 2x\cos.\,\omega + 1 = 0,\ \text{ob}\ \cos.\,\eta = -\cos.\,\vartheta,$$

reducitur ad hanc formam:

$$2k\,\frac{(x - \cos.\,\omega)}{\sin.\,\omega}\,(\sin.\,2k\,\omega - \cos.\,\vartheta\,\sin.\,k\,\omega) + 2k\,(\cos.\,2k\,\omega - \cos.\,\vartheta\,\cos.\,k\,\omega),$$

pro qua in genere sumsimus

$$= \frac{f\,(x - \cos.\,\omega)}{\sin.\,\omega} + g,\ \text{sicque erit}$$

$$f = 2k\,(\sin.\,2k\,\omega - \cos.\,\vartheta\,\sin.\,k\,\omega)\ \text{et}$$

$$g = 2k\,(\cos.\,2k\,\omega - \cos.\,\vartheta\,\cos.\,k\,\omega).$$

Loco $\sin.\,2k\,\omega$ et $\cos.\,2k\,\omega$ scribamus valores ante indicatos, prodibitque

$$f = 2k\,\sin.\,k\,\omega\,(2\cos.\,k\,\omega - \cos.\,\vartheta)\ \text{et}$$

$$g = 2k\,(2\cos.\,k\,\omega^2 - 1 - \cos.\,\vartheta\,\cos.\,k\,\omega),$$

cum autem esse debeat $\cos.\,k\,\omega = \cos.\,\vartheta$, fiet

$$f = 2k\,\sin.\,k\,\omega\,\cos.\,\vartheta = k\,\sin.\,2k\,\omega\ \text{et}$$

$$g = 2k\,(\cos.\,\vartheta^2 - 1) = -2k\,\sin.\,\vartheta^2.$$

Quia

Quia igitur in genere eſt $\omega = \frac{2i\pi + \theta}{k}$, erit

$$2k\omega = 4i\pi + 2\theta = 2\theta,$$

ita vt iam habeamus $f = k \text{ ſin. } 2\theta = 2k \text{ ſin. } \theta \text{ cof. } \theta$, ita vt ſit $ff + gg = 4kk \text{ ſin. } \theta^2$, quocirca ſi, poſito

$$1 - 2x \text{ cof. } \omega + xx = 0,$$

functio P transformetur in hanc formam: $\frac{F(x - \cos\omega)}{\sin\omega} + G$, ex denominatoris Q factore $1 - 2x \text{ cof. } \omega + xx$ orietur iſta pars integralis:

$$\frac{F \cos.\theta - G \sin.\theta}{k \sin.\theta} l V(xx - 2x \text{ cof. } \omega + 1) + \frac{G \cos.\theta + F \sin.\theta}{k \sin.\theta} A \text{ tang. } \frac{x \sin.\omega}{1 - x \cos.\omega}.$$

Tantum igitur ſupereſt vt loco ω ordine ſubſtituantur omnes eius valores, qui ſunt: $\frac{\theta}{k}, \frac{2\pi+\theta}{k}, \frac{4\pi+\theta}{k}, \ldots \frac{2(k-1)\pi+\theta}{k}$, et ſumma omnium harum formularum praebebit totum integrale quaeſitum.

Corollarium.

§. 42. Si fuerit numerator P ſimplex poteſtas ipſius x, ſcilicet $P = x^m$, tum fiet $F = \sin. m\omega$ et $G = \cos. m\omega$, vnde pars integralis ex denominatoris factore indefinito:

$1 - 2x \text{ cof. } \omega + xx$, oriunda erit

$$\frac{\cos.\theta \sin. m\omega - \sin.\theta \cos. m\omega}{k \sin.\theta} l V(xx - 2x \text{ cof. } \omega + 1) + \frac{\cos.\theta \cos. m\omega + \sin.\theta \sin. m\omega}{k \sin.\theta} A \text{ tang. } \frac{x \sin.\omega}{1 - x \cos.\omega},$$

vnde ſimul patet, ſi functio P ex pluribus huiusmodi poteſtatibus fuerit compoſita, quemadmodum integrationem abſolui oporteat.

Problema ſpeciale.

§. 43. *Propoſita formula differentiali* $\frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + 2x^k \cos.\eta + x^{2k}} \frac{dx}{x}$ *eius totum integrale inueſtigare.*

Solu-

Solutio.

Cum hic ſit $P = x^{k-n} + x^{k+n}$, erit

$F = 2 \sin. k\omega \cos. n\omega$ et $G = 2 \cos. k\omega \cos. n\omega$,

vbi $\cos. k\omega = \cos. \theta$, quibus valoribus ſubſtitutis pro parte integralis logarithmica erit:

$$\frac{P \cos. \theta - G \sin. \theta}{k \sin. \theta} = \frac{2 \cos. \theta \cos. n\omega (\sin. k\omega - \sin. \theta)}{k \sin. \theta}.$$

Cum autem in genere ſit $\omega = \frac{2i\pi + \theta}{k}$, erit $\sin. k\omega = \sin. \theta$, vnde patet, hanc formulam euaneſcere, ita vt omnes partes logarithmicae ex integrali excedant. Pro partibus autem circularibus euadet coefficiens $\frac{G \cos. \theta + F \sin. \theta}{k \sin. \theta} = \frac{2 \cos. n\omega}{k \sin. \theta}$, ſicque ex factore denominatoris indefinito $1 - 2x \cos. \omega + xx$ oritur iſta pars integralis:

$$\frac{2 \cos. n\omega}{k \sin. \theta} A \tang. \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega}.$$

In hac ergo formula pro ω ordine ſcribamus eius valores, qui ſunt $\frac{\theta}{k}$, $\frac{2\pi + \theta}{k}$, $\frac{4\pi + \theta}{k}$ etc. vsque ad $\frac{2(k-1)\pi + \theta}{k}$; vbi meminiſſe oportet eſſe $\theta = \pi - \eta$, et quo formulae non nimis fiant perplexae vtamur ſequentibus valoribus:

$$\frac{2\pi}{k} = \alpha, \quad \frac{2}{k} = \beta, \quad \frac{2n\pi}{k} = \gamma, \text{ et } \frac{n\pi}{k} = \delta,$$

vt valores ipſius ω fiant

$$\beta, \ \alpha + \beta, \ 2\alpha + \beta, \ 3\alpha + \beta, \ - - - - \ (k-1)\alpha + \beta.$$

At vero omnes valores anguli $n\omega$ erunt ordine

$$\delta, \ \gamma + \delta, \ 2\gamma + \delta, \ 3\gamma + \delta, \ - - - - \ (k-1)\gamma + \delta.$$

His igitur valoribus adhibitis totum integrale quod quaerimus erit

$$\frac{2 \cos. \delta}{k \sin. \theta} A \tang. \frac{x \sin. \beta}{1 - x \cos. \beta} + \frac{2 \cos. (\gamma + \delta)}{k \sin. \theta} A \tang. \frac{x \sin. (\alpha + \beta)}{1 - x \cos. (\alpha + \beta)}$$

$$+ \frac{2 \cos. (2\gamma + \delta)}{k \sin. \theta} A \tang. \frac{x \sin. (2\alpha + \beta)}{1 - x \cos. (2\alpha + \beta)} + \frac{2 \cos. (3\gamma + \delta)}{k \sin. \theta} A \tang. \frac{x \sin. (3\alpha + \beta)}{1 - x \cos. (3\alpha + \beta)}$$

$$+ \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ + \frac{2 \cos. (k-1)\gamma + \delta}{k \sin. \theta} A \tang. \frac{x \sin. (k-1)\alpha + \beta}{1 - x \cos. (k-1)\alpha + \beta)}$$

Coroll-

Corollarium 1.

§. 44. Euoluamus caſum quo $n = 0$, ideoque etiam $\gamma = 0$ et $\delta = 0$, et quia hoc caſu formula integralis euadet $2\int \frac{x^{k-1}\,dx}{1 + 2x^k \cos.\eta + x^{2k}}$, pro ea ſtatuathus $x^k = z$, atque ob $x^{k-1} = \frac{dz}{k}$, habebitur $\frac{2}{k}\int \frac{dz}{1+2z\cos.\eta+zz}$, cuius integrale erit:

$$= \frac{2}{k\,\text{ſin.}\,\eta}\,\text{A tang.}\,\frac{z\,\text{ſin.}\,\eta}{1 - z\cos.\eta} = \frac{2}{k\,\text{ſin.}\,\theta}\,\text{A tang.}\,\frac{z\,\text{ſin.}\,\theta}{1-z\cos.\theta},$$

vnde cum in ſerie inuenta omnes coefficientes arcuum fiant $\frac{2}{k\,\text{ſin.}\,\theta}$, per hunc coefficientem diuidendo habebimus ſequentem aequationem:

$$\text{A tang.}\,\frac{x^k\,\text{ſin.}\,\theta}{1-x^k\cos.\theta} = \text{A tang.}\,\frac{x\,\text{ſin.}\,\beta}{1-x\cos.\beta} + \text{A tg.}\,\frac{x\text{ſin.}(\alpha+\beta)}{1-x\cos.(\alpha+\beta)}$$
$$+\text{A tg.}\,\frac{x\,\text{ſin.}(2\alpha+\beta)}{1-x\cos.(2\alpha+\beta)} + \text{A tg.}\,\frac{x\,\text{ſiu.}'(k-1)\alpha+\beta)}{1-x\cos.((k-1)\alpha+\beta)},$$

vbi recordandum eſt eſſe $\alpha = \frac{2\pi}{k}$, $\beta = \frac{\theta}{k}$.

Corollarium 2.

§. 45. Ponamus eſſe $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$, et aequatio modo inuenta hanc induet formam:

$$\text{A tang.}\,x = \text{A tg.}\,\frac{x\,\text{ſin.}\,\frac{\pi}{2k}}{1-x\cos.\frac{\pi}{2k}} + \text{A tg.}\,\frac{x\,\text{ſin.}\,\frac{5\pi}{2k}}{1-x\cos.\frac{5\pi}{2k}} + \text{A tg.}\,\frac{x\,\text{ſin.}\,\frac{9\pi}{2k}}{1-x\cos.\frac{9\pi}{2k}}$$
$$+\text{A tg.}\,\frac{x\,\text{ſin.}\,\frac{13\pi}{2k}}{1-x\cos.\frac{13\pi}{2k}} + \;-\;-\;- + \text{A tg.}\,\frac{x\text{ſin.}\,\frac{(4k-3)\pi}{2k}}{1-x\cos.\frac{(4k-3)\pi}{2k}}.$$

Sit $k = 1$, eritque A tang. $x =$ A tang. x.

Sit $k = 2$, eritque A tang. $xx =$ A tang. $\frac{x}{\sqrt{2}-x} +$ A tag. $\frac{-x}{\sqrt{2}+x}$
$=$ A tang. $\frac{x}{\sqrt{2}-x} -$ A tang. $\frac{x}{\sqrt{2}+x}$.

Sit $k=3$, eritque A tang $x^3 =$ A tang. $\frac{x}{1-x\sqrt{3}} +$ A tg. $\frac{x}{1+x\sqrt{3}} -$ A tg x

etc. etc.

Haec igitur ſeries ab ea quam ſupra §. 20 inuenimus, prorſus diſcrepat, etiamſi vtriusque valor ſit idem, ſcil. A tang. x^k.

Quaeſtio prior.

§. 46. *Propoſita formula differentiali*

$$\frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1+x^k \cos.\eta + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$$

eius integralis valorem inueſtigare, qui oritur ſi poſt integrationem ponatur $x=1$.

Solutio.

Cum poſito $x=\infty$ in genere ſit

$$\text{A tang.} \frac{x \sin.\omega}{1-x\cos.\omega} = \pi - \omega,$$

valor integralis quem quaerimus hac ſerie exprimetur:

$\frac{2\cos.\delta}{k\sin.\vartheta}.(\pi-\beta) + \frac{2\cos.(\gamma+\delta)}{k\sin.\vartheta}(\pi-\alpha-\beta) + \frac{2\cos.(2\gamma+\delta)}{k\sin.\vartheta}(\pi-2\alpha-\beta)$
$+\frac{2\cos.(3\gamma+\delta)}{k\sin.\vartheta}(\pi-3\alpha-\beta) \ldots + \frac{2\cos.((k-1)\gamma+\delta)}{k\sin.\vartheta}(\pi-(k-1)\alpha-\beta)$

Statuamus igitur

$S=(\pi-\beta)\cos.\delta+(\pi-\alpha-\beta)\cos.(\gamma+\delta)+(\pi-2\alpha-\beta)\cos.(2\gamma+\delta)$
$\ldots\ldots+(\pi-(k-1)\alpha-\beta)\cos.((k-1)\gamma+\delta)$,

vt ſit valor quaeſitus $\frac{2S}{k\sin.\vartheta}$. Multiplicemus vtrinque per $2\sin.\frac{1}{2}\gamma$, et cum ſit

$$2\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\cos.q = \sin.(\tfrac{1}{2}\gamma+q) - \sin.(q-\tfrac{1}{2}\gamma),$$

hac reductione adhibita fiet:

$$2\,S\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\gamma = \left\{\begin{array}{l} -(\pi-\beta)\,\text{fin.}(\delta-\frac{1}{2}\gamma)+(\pi-\beta)\,\text{fin.}(\frac{1}{2}\gamma+\delta) \\ \qquad -(\pi-\alpha-\beta)\,\text{fin.}(\frac{1}{2}\gamma+\delta) \\ +(\pi-\alpha-\beta)\,\text{fin.}(\frac{3}{2}\gamma+\delta)+(\pi-2\alpha-\beta)\,\text{fin.}(\frac{5}{2}\gamma+\delta) \\ -(\pi-2\alpha-\beta)\,\text{fin.}(\frac{7}{2}\gamma+\delta)+(\pi-3\alpha-\beta)\,\text{fin.}(\frac{9}{2}\gamma+\delta) \end{array}\right\}\text{etc.}$$

quae ſeries contractis terminis ſimilibus tranſit in hanc:

$$\begin{aligned} 2\,S\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\gamma = &-(\pi-\beta)\,\text{fin.}(\delta-\tfrac{1}{2}\gamma)+\alpha\,\text{fin.}(\tfrac{1}{2}\gamma-\delta) \\ &+\alpha\,\text{fin.}(\tfrac{3}{2}\gamma+\delta)+\alpha\,\text{fin.}(\tfrac{5}{2}\gamma+\delta) \\ &+\ .\ .\ .\ .\ .+\alpha\,\text{fin.}(\tfrac{(2k-1)}{2}\gamma+\delta) \\ &+(\pi-(k-1)\alpha-\beta)\,\text{fin.}(\tfrac{(2k-1)}{2}\gamma+\delta), \end{aligned}$$

vbi cum ſit $\alpha = \frac{2\pi}{k}$ et $\beta = \frac{\theta}{k}$, erit

$$\pi-(k-1)\alpha-\beta = \alpha-\pi-\beta.$$

Ponatur

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = &\text{fin.}(\tfrac{1}{2}\gamma+\delta)+\text{fin.}(\tfrac{3}{2}\gamma+\delta)+\text{fin.}(\tfrac{5}{2}\gamma+\delta), \\ &+\text{fin.}(\tfrac{7}{2}\gamma+\delta)+\ .\ .\ .\ .+\text{fin.}((k-\tfrac{1}{2})\gamma+\delta), \end{aligned}$$

vt nanciſcamur:

$$\begin{aligned} 2\,S\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\gamma = &-(\pi-\beta)\,\text{fin.}(\delta-\tfrac{1}{2}\gamma) \\ &-(\pi+\beta)\,\text{fin.}((k-\tfrac{1}{2})\gamma+\delta)+\alpha\,\mathbf{T}, \end{aligned}$$

quae expreſſio ob $k\gamma = 2n\pi$ reducitur ad $-2\pi\,\text{fin.}(\delta-\frac{1}{2}\gamma)+\alpha\mathbf{T}$. Nunc igitur ad quantitatem $\mathbf{T}$ inueniendam multiplicemus vtrinque per $2\,\text{fin.}\frac{1}{2}\gamma$, et cum in genere ſit:

$$2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\gamma\,\text{fin.}\,q = \text{cof.}(q-\tfrac{1}{2}\gamma)-\text{cof.}(q+\tfrac{1}{2}\gamma),$$

obtinebimus:

$$2\,\mathbf{T}\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\gamma = \left\{\begin{array}{l} \text{cof.}\delta-\text{cof.}(\gamma+\delta)-\text{cof.}(2\gamma+\delta)-\text{cof.}(3\gamma+\delta) \\ \qquad +\text{cof.}(\gamma+\delta)+\text{cof.}(2\gamma+\delta)+\text{cof.}(3\gamma+\delta) \\ \qquad -\text{cof.}(4\gamma+\delta)\ .\ .\ .\ .-\text{cof.}(k\gamma+\delta) \\ \qquad +\text{cof.}(4\gamma+\delta)\ .\ .\ .\ -\ -\ -\ -\ - \end{array}\right\}$$

quae forma contrahitur in iſtam:

$$2\,T\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \text{cof.}\,\delta - \text{cof.}\,(\gamma\,k + \delta).$$

Cum autem ſit $\gamma = \frac{2n\pi}{k}$, erit $k\gamma = 2n\pi$, ideoque

$$\text{cof.}\,(k\gamma + \delta) = \text{cof.}\,\delta,$$ vnde fit

$$2\,T\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\gamma = 0,$$ ita vt nunc ſit

$$2\,S\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\gamma = 2\pi\,\text{ſin.}\,(\tfrac{1}{2}\gamma - \delta),$$ ideoque,

$$S = \frac{\pi\,\text{ſin.}\,(\frac{1}{2}\gamma - \delta)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\gamma}.$$

Eſt vero $\frac{1}{2}\gamma = \frac{n\pi}{k}$ et $\delta = \frac{n\vartheta}{k}$, ideoque

$$\tfrac{1}{2}\gamma - \delta = \tfrac{n(\pi-\vartheta)}{n} = \tfrac{n\eta}{k},$$ ob $\vartheta = \pi - \eta$,

hocque modo habebimus $S = \frac{\pi\,\text{ſin.}\,\frac{n\eta}{k}}{\text{ſin.}\,\frac{n\pi}{k}}$, conſequenter valor integralis quaeſiti concluditur fore

$$\frac{2\pi\,\text{ſin.}\,\frac{n\eta}{k}}{k\,\text{ſin.}\,\vartheta\,\text{ſin.}\,\frac{n\pi}{k}} = \frac{2\pi\,\text{ſin.}\,\frac{n\eta}{k}}{k\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\frac{n\pi}{k}},$$

vnde formetur ſequens Theorema.

Theorema I.

§. 47. *Haec formula integralis:*

$$\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + 2x^k\,\text{cof.}\,\eta + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x},$$

a termino $x = 0$ *vsque ad* $x = \infty$ *extenſa, producit hunc valorem:* $\frac{2\pi\,\text{ſin.}\,\frac{n\eta}{k}}{k\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\frac{n\pi}{k}}$. Cui adiungatur adhuc ſequens.

Theo-

Theorema 2.

§. 48. *Iſta vero formula integralis:*

$$\int \frac{x^{k \pm n - 1} \, dx}{1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k}},$$

pariter a termino $x = 0$ *vsque ad terminum* $x = \infty$ *extenſa, valorem habet dimidium praecedentis, qui ergo erit*

$$\frac{\pi \sin. \frac{n\eta}{k}}{k \sin. \eta \sin. \frac{n\pi}{k}},$$

cuius demonſtratio perinde ſuccedet ac ſupra. §. 23.

Quaeſtio altera.

§. 49. *Propoſita formula differentiali:*

$$\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x},$$

eius integralis valorem inueſtigare, qui oritur ſi poſt integrationem ponitur $x = 1$.

Solutio.

Poſito $x = 1$ formula generalis $A \tang. \frac{\alpha \sin. \omega}{1 - \alpha \cos. \omega}$, vt ſupra vidimus, reducitur ad $\frac{\pi - \omega}{2}$; vnde patet, ſingulas partes integralis duplo minores eſſe quam caſu praecedente, vnde valor quaeſitus etiam erit duplo minor

$$= \frac{\pi \sin. \frac{n\eta}{k}}{k \sin. \eta \sin. \frac{n\pi}{k}}, \text{ vnde naſcitur ſequens}$$

Theorema.

§. 50. *Iſta formula integralis:*

$$\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + 2x^k \cos.\eta + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x},$$

a termino $x = 0$ *vsque ad* $x = 1$ *extensa, producet hunc valorem:* $\frac{\pi \sin.\frac{n\eta}{k}}{k \sin.\eta \sin.\frac{n\pi}{k}}$.

Scholion.

§. 51. In his valoribus integralibus ii casus praecipue sunt notatu digni, quibus post integrationem statuitur $x = 1$, quandoquidem tum ista integralia commode per seriem infinitam exprimere licet. Ita pro casu §. 26, quoniam est

$$\frac{1}{1 + x^{2k}} = 1 - x^{2k} + x^{4k} - x^{6k} + \text{etc.}$$

si hanc seriem multiplicemus per $(x^{k-n} + x^{k+n})\frac{dx}{x}$, et integremus, tum vero ponamus $x = 1$, prodibit ista series infinita:

$$\frac{1}{k-n} - \frac{1}{3k-n} + \frac{1}{5k-n} - \frac{1}{7k-n} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{k+n} - \frac{1}{3k+n} + \frac{1}{5k+n} - \frac{1}{7k+n} + \text{etc.}$$

cuius ergo seriei in infinitum continuatae summa est $\frac{\pi}{2k \cos.\frac{n\pi}{2k}}$. At pro casu §. 38. ob

$$\frac{1}{1 - x^{2k}} = 1 + x^{2k} + x^{4k} + x^{6k} + \text{etc.}$$

eodem modo operando peruenitur ad hanc seriem:

$$\frac{1}{k-n} + \frac{1}{3k-n} + \frac{1}{5k-n} + \frac{1}{7k-n} + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{k+n} - \frac{1}{3k+n} - \frac{1}{5k+n} - \frac{1}{7k+n} - \text{etc.}$$

cuius

cuius ergo ſumma erit $\frac{\pi}{2k}\operatorname{tang}.\frac{n\pi}{2k}$. Denique pro caſu, quem extremo loco tractauimus, cum ſit vt alibi oſtendimus:

$$\frac{\text{ſin. }\eta}{1+2x^k\text{ coſ. }\eta+x^{2k}} = \text{ſin.}\eta - x^k\text{ ſin.}2\eta + x^{2k}\text{ ſin.}3\eta - \text{etc.}$$

haec ſeries ducta in $(x^{k-n}+x^{k+n})\frac{dx}{x}$ et integrata, ſumendo $x=1$, producet hanc ſeriem:

$$\frac{\text{ſin. }\eta}{k-n} - \frac{\text{ſin. }2\eta}{2k-n} + \frac{\text{ſin. }3\eta}{3k-n} - \frac{\text{ſin. }4\eta}{4k-n} + \text{etc.}$$
$$+\frac{\text{ſin. }\eta}{k+n} - \frac{\text{ſin. }2\eta}{2k+n} + \frac{\text{ſin. }3\eta}{3k+n} - \frac{\text{ſin. }4\eta}{4k+n} + \text{etc.}$$

cuius ergo valor aequabitur illi quem inuenimus valori ducto in ſin. η, ita vt ſumma huius ſeriei ſit $= \frac{\pi\,\text{ſin. }\frac{n\eta}{k}}{k\,\text{ſin. }\frac{n\pi}{k}}$, quae ſeries eo magis ſunt memorabiles, quod alio modo earum ſumma vix elici poteſt.

DE DVPLICI GENESI TAM EPICYCLOIDVM QVAM HYPOCYCLOIDVM

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Non dubito quin a Geometris, qui iam olim generationem Epicycloidum et Hypocycloidum docuerunt, obseruatum sit, quamlibet harum curuarum duplici modo produci posse, dum scilicet duo circuli mobiles prorsus diuersi circa peripheriam eiusdem circuli fixi circumuoluuntur: neque tamen memini, hanc obseruationem vsquam legisse. Cum igitur nuper, dum curuas, quae suis euolutis siue primis siue secundis sint similes, denuo sum perscrutatus, in hanc proprietatem incidissem, haud ingratum fore arbitror, si hoc argumentum data opera pertractauero, atque huius insignis proprietatis geminam demonstrationem, alteram analyticam, alteram geometricam communicauero.

§. 2

§. 2. Conueniet autem ante omnia cunctos diuersos casus considerasse, quibus circuli mobiles super peripheria circuli fixi prouolui possunt. Sit igitur A centrum circuli fixi, cuius radius $AC = a$, super quo incedat alius quicunque circulus CBD, cuius centrum sit B et radius $BC = b$; initio autem motus tangat circulus mobilis circulum fixum in C, vbi stilum gerat, quo sua prouolutione describat Cycloidem C Z. Circulum fixum simpliciter littera A, mobilem vero littera B breuitatis gratia designabo. Ac primo quidem patet, dum circulus mobilis B continuo augetur, hoc modo omnes curuas, quae Epicycloides vocantur, generari. Si enim circulus B euanescat, perpetuo quidem in eodem puncto C manebit, ita vt tota curua descripta in vnicum punctum quasi coalescat. Sin autem circulus B vsque in infinitum augeatur, eius peripheria in lineam rectam abibit, circulum A in C tangentem, ex cuius motu orietur curua ex euolutione circuli nata. Inter hos igitur duos casus extremos omnes plane Epicycloides constitui oportet, quae eo ampliores euadent, quo maior radius circuli mobilis b accipiatur. Tab. I. Fig. 1.

§. 3. Hic circulum mobilem B extra circulum fixum prouolui assumsimus; nunc igitur eum intra hunc circulum collocemus, ita vt iam eius radius BC tanquam negatiuus, respectu prioris positionis, spectari debeat. Si ergo primo hic circulus fuerit infinite paruus, perpetuo in eodem puncto C perseuerabit. Augendo autem successiue hunc circulum eius prouolutione generabuntur omnes Hypocycloides C Z, donec, cum diameter istius circuli CD radio circuli fixi CA factus fuerit aequalis, Hypocyclois C Z in ipsum diametrum sit abitura. Quod Fig. 2.

ſi vero circulus B vlterius augeatur, vt eius diameter $CD = 2b$ maior fiat radio circuli fixi $CA = a$, ſiue $b > \frac{1}{2}a$, tum iterum praecedentes Hypocycloides reſuitabunt, atque talis circulus, cuius radius $b = \frac{1}{2}(a+c)$, eandem Hypocycloidem deſcribet ac minor circulus, cuius radius $b = \frac{1}{2}(a-c)$. Quin etiam, ſi circulus B ipſi circulo fixo A fiat aequalis, nulla amplius prouolutio locum habere poteſt, ſed ſtilus perpetuo in eodem puncto C perſeverabit prorſus vti caſu $b = 0$. Ex quo iam intelligitur, omnes Hypocycloides duplici modo generari poſſe, quandoquidem eadem curua deſcribitur, ſiue radius circuli mobilis ſit $\frac{1}{2}(a-c)$ ſiue $\frac{1}{2}(a+c)$, quemadmodum deinceps ſum demonſtraturus.

Tab. I. Fig. 3.

§. 4. Augeamus nunc vlterius circulum mobilem B, vt circulum fixum A ſuperet eumque totum in ſe complectatur, ita vt ſit $b > a$; tum autem ſi punctum contactus initio ſit in C, vbi ſimul ſtilus concipiatur, prouolutione huius circuli B circa fixum A curua deſcribetur CZ, tota extra circulum fixum ſita, quae ergo iterum ad claſſem Epicycloidum erit referenda, atque adeo eadem erit, quae prodiret, ſi circulus mobilis, cuius diameter foret $= DE$, exceſſui ſcilicet diametrorum CD ſuper CE aequalis, ſiue cuius radius foret $= b-a$, extra circulum fixum, qualis in figura eſt circulus C d, reuolueretur. Cum igitur hic circulus C d reſpectu praecedentis poſitionis pro negatiuo haberi debeat, ſi eius radius vocetur $= d$, erit $-d = b-a$, ſiue $d = a-b$, ita vt ſit $b+d = a$, et nunc demonſtrandum eſt, a duobus circulis mobilibus, quorum radii ſint b et d, eandem Epicycloidem generari, ſi fuerit $b+d = a$, ſiue quoties in figura fuerit $Cd = DE$.

DE

DEMONSTRATIO ANALYTICA.

§. 5. Conſideremus circulum mobilem, cuius radius $= b$, quique extus circa peripheriam circuli fixi, cuius centrum in A et radius $AC = a$ prouoluatur, horumque circulorum contactum initio ponamus fuiſſe in puncto C, dehinc vero circulum mobilem peruenisſe in ſitum PZQ, vbi circulum A tangit in puncto P, centrum autem habeat in O, ita vt ſit $PO = b$, ideoque $AO = a + b$. Quod ſi igitur in hoc circulo capiatur arcus PZ aequalis arcui CP, erit punctum Z in Epicycloide quaeſita CZ. Hinc porro ad axem ACD ducatur normalis ZX, vt rectae AX et XZ referant binas coordinatas pro puncto Z, ad quas definiendas etiam ex centro circuli mobilis O ad axem agatur normalis OR, per Z vero recta SU, rectam AO ſecans in U, rectam vero OR in S, ita vt ſit $AX = AR - ZS$ et $XZ = OR - OS$. Tab. I. Fig. 4.

§. 6. His praeparatis vocemus angulum $CAO = \omega$, et cum ſit arcus $CP = a\omega$, erit etiam arcus $PZ = a\omega$, qui per radium $OP = b$ diuiſus dat angulum $POZ = \frac{a\omega}{b}$. Iam ob $AO = a + b$ ex triangulo AOR ſtatim nanciſcimur $AR = (a + b)$ cof. ω et $OR = (a + b)$ ſin. ω. Deinde quia angulus $OUZ = \omega$ et angulus $POZ = \frac{a}{b}\omega$, erit angulus $OZS = (\frac{a+b}{b})\omega$, pro quo breuitatis gratia ſcribamus $\lambda\omega$, ita vt ſit $\lambda = \frac{a+b}{b}$, ideoque $b = \frac{a}{\lambda - 1}$. Hinc iam in triangulo OZS, ob $OZ = b$ habebimus

$$ZS = b \text{ cof. } \lambda\omega \text{ et } OS = b \text{ ſin. } \lambda\omega,$$

ex quibus ambae coordinatae ita prodibunt expreſſae:

$$AX = x = AR - SZ = (a+b)\cos.\omega - b\cos.\lambda\omega \text{ et}$$
$$XZ = y = OR - OS = (a+b)\sin.\omega - b\sin.\lambda\omega,$$

vbi ſi loco b ſcribamus valorem $\frac{a}{\lambda-1}$, fiet

$$x = \frac{a}{\lambda-1}(\lambda\cos.\omega - \cos.\lambda\omega) \text{ et}$$
$$y = \frac{a}{\lambda-1}(\lambda\sin.\omega - \sin.\lambda\omega).$$

§. 7. Videamus nunc, num alius circulus mobilis aſſignari queat, qui eosdem valores pro coordinatis x et y praebeat, quod ſi enim contigerit, euictum erit, eandem Epicycloidem duplici modo produci poſſe. Ponatur igitur huius alterius circuli radius $= b'$, vnde oriatur $\lambda' = \frac{a+b'}{b'}$; tum vero iſti circulo reſpondeat angulus ω', et quia coordinatae eaedem eſſe debent, erit:

$$x = \frac{a}{\lambda'-1}(\lambda'\cos.\omega' - \cos.\lambda'\omega') \text{ et}$$
$$y = \frac{a}{\lambda'-1}(\lambda'\sin.\omega' - \sin.\lambda'\omega')$$

quae expreſſiones vt illis aequales reddantur, partes priores ſuperiorum aequales ſtatuantur partibus poſterioribus iſtarum expreſſionum, viciſſimque partes poſteriores illarum partibus priorum, vnde naſcuntur quatuor ſequentes aequalitates:

$$\frac{\lambda}{\lambda-1}\cos.\omega = -\frac{1}{\lambda'-1}\cos.\lambda'\omega', \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}\sin.\omega = -\frac{1}{\lambda'-1}\sin.\lambda'\omega',$$
$$-\frac{1}{\lambda-1}\cos.\lambda\omega = \frac{\lambda'}{\lambda'-1}\cos.\omega', \quad -\frac{1}{\lambda-1}\sin.\lambda\omega = \frac{\lambda'}{\lambda'-1}\sin.\omega'.$$

Hic igitur primo angulos vtrinque faciamus aequales, et ex prima et ſecunda fiet $\omega = \lambda'\omega'$: ob tertiam vero et quartam eſſe debet $\lambda\omega = \omega'$, ex quibus coniunctim ſequitur $1 = \lambda\lambda'$, ideoque $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$. Nunc igitur ſinibus et coſinibus omiſſis coefficientes in omnibus quatuor aequationibus

nibus ſponte fient aequales; ex prima enim erit

$$\frac{\lambda}{\lambda-1} = -\frac{1}{\lambda'-1} = -\frac{1}{\frac{1}{\lambda}-1} = -\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

ſimilique modo idem euenit in reliquis formulis. Conſequenter circulus mobilis, cuius radius $= b'$, eandem generabit curuam ac circulus cuius radius $= b$.

§. 8. Cum igitur poſuerimus

$\lambda = \frac{a+b}{b}$ et $\lambda' = \frac{a+b'}{b'}$, ob

$\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ fiet $\frac{b'}{a+b'} = \frac{a+b}{b}$,

ex qua aequatione colligitur

$$b' = -a-b, \text{ ita vt ſit } b+b' = -a,$$

ex quo patet, binos circulos mobiles, quorum radiorum ſumma negatiue aequatur radio circuli fixi, eandem generare Epicycloidem, ſi modo notetur, valores poſitiuos a puncto C ſurſum, negatiuos autem deorſum eſſe capiendos.

§ 9. Quod ſi ergo ſtatuamus

$$b = -\tfrac{1}{2}a(1+n), \text{ erit } b' = -\tfrac{1}{2}a(1-n).$$

Ponamus igitur in prioribus formulis pro x et y inuentis loco b iſtum valorem: $-\frac{1}{2}a(1+n)$, vnde fit $\lambda = \frac{n-1}{n+1}$, et conſequemur ſequentes valores:

$$x = \tfrac{1}{2}a\left((1-n)\cos.\omega + (1+n)\cos.\tfrac{n-1}{n+1}\omega\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}a\left((1-n)\sin.\omega + (1+n)\sin.\tfrac{n-1}{n+1}\omega\right).$$

Ponamus hic, ad fractiones tollendas, $\omega = (n+1)\Phi$ et impetrabimus has formulas:

$$x = \tfrac{1}{2}a\left((1-n)\cos.(n+1)\Phi + (1+n)\cos.(n-1)\Phi\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}a\left((1-n)\sin.(n+1)\Phi + (1+n)\sin.(n-1)\Phi\right)$$

quarum prior manifesto eadem manet, etiamsi loco n scribatur $-n$, posterior vero, facta hac mutatione, abit in sui negatiuum, quo autem natura curuae non mutatur, ita vt iam demonstratum sit, eandem curuam oriri, siue pro circulo mobili capiatur

$$b = -\tfrac{1}{2}a(1+n), \text{ siue } b = -\tfrac{1}{2}a(1-n).$$

DEMONSTRATIO GEOMETRICA.

Tab. I. Fig. 5.

§. 10. Constituto circulo fixo, cuius centrum in A et radius $AC = a$, considerabimus duos circulos hunc in C tangentes, vbi vterque gerat stilum, quo deinceps, dum vterque circa circulum fixum conuoluitur, curua describatur C Z. Ac prior quidem circulus conuexitate sua circulum fixum in C tangens habeat suum centrum in B, sitque eius radius $BC = b$, ideoque diameter $CD = 2b$; alter vero circulus fixum concauitate sua in C amplectens centrum suum habeat in B', sitque eius radius $B'C = B'D' = a + b$, qui ergo aequibitur summae radiorum circuli fixi et superioris B, vnde erit interuallum

$$AB' = b = CB, \text{ ideoque } CB' = AB.$$

Praeterea vero erit interuallum $ED = CD = 2b$.

Fig. 6.

§. 11. Postquam initio ambo circuli mobiles situm modo descriptum tenuerunt, peruenerit superior circulus B, facta quadam prouolutione, in situm $c Z d$, ita vt eius centrum iam sit in b, atque in eius peripheria abscindatur arcus cZ, aequalis arcui cC super circulo fixo, eritque punctum Z locus, vbi iam stilus huius circuli reperietur, ideoque punctum in curua CZ. Tum vero punctum c erit contactus huius circuli cum fixo, ita vt sit $Ab = a + b$.

Iam

Iam ex Z per punctum c producatur chorda Zc, donec circulum fecet in puncto c', ac manifestum est, segmenta cZ et cc' fore similia, propterea quod arcus amborum cum suis chordis aequales faciunt angulos: vterque enim arcus Zc et cc' ad rectam Ab est normalis. Hanc ob rem erit arcus cZ ad arcum cc' vti chorda cZ ad chordam cc', atque etiam vti radii circulorum, ad quos pertinent, hoc est vt $b:a$; vnde patet etiam fore chordas inter se vt $b:a$.

§. 12. Quod si iam super recta $c'Z$, tanquam chorda, simile exstruatur segmentum $c'rz$, ita vt angulus, quem iste arcus cum sua chorda constituit, aequalis sit angulo quem arcus cc' cum sua chorda facit, patet, arcum $c'rz$ tangere circulum fixum in puncto c', et quia eius chorda $c'Z$ est summa chordarum $c'c$ et cZ, etiam ipse arcus $c'rZ$ aequabitur summae arcuum $c'c$ et cZ; at vero fecimus arcum $cZ =$ arcui cC, vnde sequitur arcum $c'rZ$ aequalem esse arcui circuli fixi Cc'.

§. 13. Quoniam porro arcus $c'rZ$ aequalis est summae arcuum sibi similium $c'c$ et cZ, quorum radii sunt $Ac' = a$ et $cb = b$, etiam radius circuli, cuius est portio, erit summae illorum radiorum $a + b$ aequalis, ideoque erit arcus circuli alterius mobilis B'. Hinc quia iste arcus circulum fixum in c' tangit, eius centrum erit in recta cA producta in b', ita vt sit $Ab' = AB' = b$; vnde patet, postquam iste circulus, qui initio fixum tangebat in C, eo vsque fuerit prouolutus, vt eum iam in puncto c' tangat, eius cuspidem interea peruenisse in ipsum punctum Z, propterea quod arcus $c'rZ$ aequalis est arcui $c'cC$,

sic-

ſicque euictum eſt, vtriusque circuli B et B′ motu eandem Epicycloidem C Z deſcribi.

§. 14. Super his ſequentia annotaſſe iuuabit, quod ſi ponatur angulus C A $c = \omega$, vt ſit arcus C $c = a\omega$, quia huic aequalis eſt arcus c Z, erit angulus $c\,b$ Z $= \frac{a\omega}{b}$. Tum vero quia arcus $c\,c'$ ſimilis eſt arcui c Z, erit etiam angulus c A $c' = \frac{a\omega}{b}$. Quin etiam, ſi ducatur recta b Z, quia etiam arcus $c'r$ Z binis memoratis arcubus ſimilis eſt, eiusque centrum in b' verſatur, erit b' Z eius radius $= a + b = b'c'$ et angulus $c'\,b'$ Z $= \frac{a\omega}{b}$; vnde patet, rectam b' Z parallelam fore rectae A c. Praeterea vero, quia etiam recta A b eſt $a + b$, ideoque aequalis rectae b' Z, manifeſtum eſt, quadrilaterum A b' Z b eſſe parallelogrammum, ex quo indoles huius figurae penitius perſpicitur. Praeterea hic obſeruaſſe operae pretium erit, arcum C Z a minore circulo B deſcribi, dum prouoluitur per angulum C A $c = \omega$, eundem vero arcum ab altero circulo maiori deſcribi, dum is prouoluitur per angulum

C A $c' = \frac{a+b}{b}\omega$.

§. 15. Quod ſi iam angulum C A $c = \omega$ tantum accipiamus, vt interea minor circulus B totam reuolutionem abſoluerit, eiusque ſtilus nunc in c peruenerit, vbi curua denuo habebit cuspidem, quia iſtius circuli peripheria eſt $2\pi b$, cui arcus C c aequalis ſtatui debet, fiet angulus $\omega = \frac{2\pi b}{a}$. Interea autem maior circulus B′ prouolutus erit per angulum $\frac{(a+b)}{b} = \frac{2\pi(a+b)}{a}$; ſuper circulo igitur fixo interea percurrit arcum $= 2\pi(a+b)$, quae eſt ipſa peripheria iſtius circuli B′, ita vt, dum minor circulus B inte-

integram reuolutionem absoluit, etiam maior circulus integram reuolutionem absoluerit.

§. 16. Etsi in hac demonstratione assumsimus, circulum fixum ab altero circulo mobili extus tangi, alterum vero maiorem intus tangere, ita vt summa diametrorum illorum duorum aequalis sit diametro huius maximi: tamen eadem demonstratio facile applicari potest ad casum, quo ambo circuli mobiles circulum fixum intus tangunt, quo casu summa diametrorum amborum circulorum mobilium diametro circuli fixi aequalis esse debet. Interim tamen sequens theorema adiungamus, quo iste casus facilius expedietur.

Theorema.

§. 17. Si circulus D E F intus in duobus quibuscunque punctis E et F tangatur a duobus circulis E G H et F G H, quorum diametri simul sumti aequentur diametro circuli maximi D E F, ducaturque chorda E F per contactus puncta E et F, ea per alteram intersectionem G amborum circulorum minorum transibit, et ambo arcus E G et F G simul sumti aequales erunt arcui E F. Tab I. Fig. 7.

Demonstratio.

Quia ambo circuli minores maiorem tangunt in punctis E et F, chorda E F ad omnes tres circulos aequaliter inclinabitur, ideoque ab omnibus tribus similia segmenta abscindet, et chordae duorum minorum simul sum-

tae aequales erunt chordae maximi circuli E F; vnde patet intersectionem amborum circulorum minorum G in ipsam rectam E F incidere, ita vt sit E G : F G vt diameter circuli E G H ad diametrum circuli F G H, qui cum simul sumti aequales sint diametro circuli maximi, euidens est, etiam summam chordarum E G et F G toti chordae E F aequalem esse debere. Quoniam igitur arcus his chordis subtensi ad eas eandem tenent rationem, necesse est vt arcus E F aequalis sit summae arcuum E G et F G.

Corollarium 1.

§. 18. Cum arcus E F aequalis sit summae arcuum E G et F G, is ita secetur in I, vt fiat arcus E I = arcui E G et arcus F I = arcui F G; et iam manifestum est, si ambo circuli minores initio maximum tetigerint in puncto I, vbi vtrique stilus infixus concipiatur; tum stilum circuli E G H nunc fore in puncto G, vbi etiam erit stilus alterius circuli F G H; vnde patet, ambos stilos ex I egressos eandem curuam I G esse descripturos, quae ergo erit Hypocyclois vtrique circulo mobili communis.

Corollarium 2.

§. 19. Quod si ergo ambo circuli mobiles initio circulum maximum in puncto I contigerint, indeque ambo in plagas contrarias ita prouoluantur per arcus I E et I F, qui inter se habeant rationem diametrorum, tum isti circuli se perpetuo in iisdem punctis intersecabunt, iis scilicet, quae initio fuerant simul in puncto I. Ceterum hic

Phae-

Phaenomenon maxime notatu dignum se offert, quod, dum ambo circuli mobiles se in duobus punctis G et H intersecant, istas demonstratae proprietates ad alterum tantum horum duorum punctorum pertineant.

Corollarium 3.

§. 20. Quod autem ad situm puncti H attinet, si ex puncto G vtriusque circuli ducantur diametri G P et G Q, iungaturque recta P Q, facillime demonstrari potest, punctum H in ipsam hanc rectam P Q incidere, atque adeo chordam G H in eam esse perpendicularem. Quia enim anguli G H P et G H Q, vtpote in semicirculo, sunt recti, etiam chordae P H et Q H in directum iacent.

DE CVRVIS RECTIFICABILIBVS IN SVPERFICIE CONI RECTI DVCENDIS.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Cum certo affirmare liceat, in ſuperficie cylindrica nullas duci poſſe lineas, quae rectificationem admittant, praeter ipſas lineas rectas axi cylindri parallelas: idem multo magis de ſuperficiebus conicis ſtatuendum videtur, propterea quod cylindrus tanquam ſpecies coni ſpectari poteſt, dum altitudo in infinitum augetur. Interim tamen obſeruaui, dari ciusmodi conos rectos, in quorum ſuperficie, praeter lineas rectas a vertice coni ad circumferentiam baſis ductas, innumeras alias lineas curuas geometrice deſcribi poſſe, quae rectificationes admittant; quod autem neutiquam in omnibus conis rectis, multo minus in obliquis effici poſſe videtur. Talis enim conſtructio tantum in iis conis rectis ſuccedit, quorum latera ad diametrum baſis rationalem tenent rationem; quae inueſtigatio cum neutiquam

quam fit obuia, operae pretium esse duxi eam hic data opera explicare.

§. 2. Sit recta A B axis coni et punctum A eius vertex, at Z punctum quodcunque in superficie coni, vnde ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y; hincque ad axem ducatur normalis Y X, vt locus puncti Z determinetur per ternas coordinatas inter se normales, quae vocentur $AX = x$; $XY = y$ et $YZ = z$. Iam ducatur recta X Z, quae erit radius sectionis coni ad axem normaliter in puncto X factae, ac manifestum est fore A X : X Z vt axis coni A B ad radium basis. Quare si axis coni vocetur $AB = a$ et radius basis $BC = b$, ob $XZ = V(yy + zz)$ erit $x : V(yy + zz) = a : b$, ideoque $bx = aV(yy + zz)$, quae est aequatio naturam superficiei huius coni exprimens. Quodsi porro latus coni A C dicatur $= c$, vt sit $c = V(aa + bb)$, tum vero ducta concipiatur recta A Z, quae erit $= V(xx + yy + zz)$, erit etiam $x : V(xx + yy) = a : c$, quibus positis ostendam, quoties ratio $b : c$ fuerit rationalis, tum semper infinitas curuas rectificabiles in superficie huius coni duci posse. Tab. II. Fig. 1.

§. 3. Sumamus igitur punctum Z versari in tali curua rectificabili, atque ex elementis constat, elementum istius curuae hac formula exprimi: $V(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, quam ergo quomodo integrabilem reddi oporteat, hic exit docendum. Quo autem hoc facilius praestari possit vocemus rectam $XZ = v$, vt sit $v = V(yy + zz)$ et $x : v = a : b$, siue $av = bx$; tum vero in calculum introducatur angulus $YXZ = \Phi$, eritque

$$XY = y = v \text{ cof. } \Phi \text{ et } YZ = z = v \text{ fin. } \Phi,$$

ſicque omnia per has binas nouas variabiles v et Φ definire poterimus, cum ſit $x = \frac{av}{b}$. Hinc enim erit

$$dx = \frac{a\,dv}{b};$$

$$dy = dv \text{ cof. } \Phi - v\,d\Phi \text{ fin. } \Phi \text{ et}$$

$$dz = dv \text{ fin. } \Phi + v\,d\Phi \text{ cof. } \Phi,$$

vnde colligitur

$$dy^2 + dz^2 = dv^2 + v\,v\,d\Phi^2$$

cui formulae ſi addatur $dx^2 = \frac{a\,a\,dv^2}{b\,b}$, obtinebitur quadratum elementi curuae

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{dv^2(aa+bb)+bbvvd\Phi^2}{cb},$$

quam ob rem ob $aa + bb = cc$ elementum curuae in ſuperficie coni deſcribendae erit

$$= \tfrac{1}{b}V(cc\,dv^2 + bb\,v\,v\,d\Phi^2) = \tfrac{c}{b}V(dv^2 + \tfrac{bb}{cc}v\,v\,d\Phi^2).$$

Tota igitur quaeſtio nunc huc eſt reducta, cuiusmodi relatio algebraica inter v et quantitates angulum Φ determinantes, veluti fin. Φ vel tang. Φ, conſtitui debeat, vt iſta formula differentialis integrationem admittat.

§. 4. Quoniam hic angulus Φ quaſi datus et cognitus ſpectatur, etiam angulus $\frac{b\Phi}{c}$ quaſi cognitus ſpectari poterit, dummodo $\frac{b}{c}$ fuerit numerus rationalis; atque huic fundamento innititur conditio ante memorata, quod, niſi ratio $b:c$ fuerit rationalis, quaeſtio noſtra reſolui nequeat. Loco anguli Φ ergo introducatur alius angulus ω, vt ſit $\omega = \frac{b\Phi}{c}$, et quia nunc elementum curuae quaeſitae erit $= \frac{c}{b}V(dv^2 + v^2 d\omega^2)$, quaeritur eiusmodi relatio inter v et ω, qua iſta formula reddatur integrabilis.

§. 5.

§. 5. Quanquam autem olim varias methodos expoſui, plurimas formulas differentiales integrabiles reddendi, tamen nullum artificium, quo tum temporis ſum vſus, ad praeſens inſtitutum accommodari poteſt, ita vt fateri cogar, me nullam viam directam perſpicere poſſe, qua iſta formula differentialis $V(dv^2+vvd\omega^2)$ ad integrationem reuocari queat. Quare cum ea pars Analyſeos, quae in huiusmodi inueſtigationibus verſatur, et cui nomen Analyſeos infinitorum indeterminatae impoſui, etiamnunc parum ſit exculta, ea maxima incrementa inde acceptura erit cenſenda, ſi Geometrae methodum directam fuerint perſecutati, cuius beneficio iſta formula $V(dv^2+vvd\omega^2)$, aliaeque huius generis ad integrabilitatem perduci queant.

§. 6. Equidem hunc laborem penitus deſerere fuiſſem coactus, niſi obſeruaſſem, iſtam formulam ope certae ſubſtitutionis ad iſtam ſpeciem: $V(dX^2+dY^2)$ reduci poſſe, cuius reſolutio vtique eſt in poteſtate, quandoquidem totum negotium eo redit, vt curuae algebraicae rectificabiles inueſtigentur, quippe quarum coordinatae orthogonales idoneos valores pro quantitatibus X et Y ſuppeditabunt. Quam ob rem ante omnia in eiusmodi quantitates X et Y nobis erit inquirendum, vt fiat $dX^2+dY^2=dv^2+vvd\omega^2$; tum vero vt ambo differentialia dX et dY integrationem admittant.

§. 7. Statim quidem in oculos incurrit, primae conditioni ſatisfieri ſtatuendo $dX=dv$ et $dY=vd\omega$, vnde quidem integrando fieret $X=v$; verum altera formula $Y=\int vd\omega$ integrabilitate deſtituitur; neceſſe enim eſt, vt ambo iſti valores indefinite euadant integrabiles, quocirca prio-

priorem conditionem generaliter adimpleamus ſtatuendo

$$dX = dv \sin.\theta + v\,d\omega \cos.\theta \text{ et}$$

$$dY = dv \cos.\theta - v\,d\omega \sin.\theta,$$

quandoquidem hinc conficitur

$$dX^2 + dY^2 = dv^2 + v^2 d\omega^2$$

quicunque etiam angulus pro θ ſubſtituatur. Vnde nunc quaeſtio eo eſt perducta, num pro θ eiusmodi angulus accipi queat, vt inde ambae formulae euadant integrabiles, id quod quidem in aprico eſt poſitum. Si enim ſumamus $\theta = \omega$, perſpicuum eſt inde repertum iri $X = v \sin.\omega$ et $Y = v \cos.\omega$, quibus ergo valoribus pro X et Y conſtitutis inde viciſſim erit

$$v = V(XX + YY) \text{ et } \text{tang.}\,\omega = \frac{X}{Y}$$

ideoque

$$\sin.\omega = \frac{X}{V(XX+YY)} \text{ et } \cos.\omega = \frac{Y}{V(X^2+Y^2)}.$$

§. 8. Tota ergo quaeſtio circa curuas rectificabiles in ſuperficie conica inueniendas eo eſt reducta, vt quaerantur binae quantitates X et Y, vnde oriatur formula $V(dX^2 + dY^2)$ integrabilis. Quodſi enim fuerit

$$\int V(dX^2 + dY^2) = S$$

ita vt S ſit quantitas algebraica, ſtatim inde nanciſcimur, vt modo vidimus, $v = V(X^2+Y^2)$; tum vero $\text{tang.}\,\omega = \frac{X}{Y}$, hinque porro

$$\sin.\omega = \frac{X}{V(X^2+Y^2)} \text{ et } \cos.\omega = \frac{Y}{V(X^2+Y^2)}.$$

Deinceps vero ex angulo ω definiatur angulus Φ, vt ſit $\Phi = \frac{c\omega}{b}$, quo angulo inuento pro ſingulis punctis Z curuae

in

in ſuperficie coni ducendae habebuntur ternae coordinatae:

1°. $AX = x = X = \frac{av}{b} = \frac{a}{b} V(X^2 + Y^2)$;

2°. $XY = y = v \cos. \Phi = \cos. \Phi V(X^2 + Y^2)$ ac

3°. $YZ = z = v \sin. \Phi = \sin. \Phi V(X^2 + Y^2)$.

Denique vero, in quo cardo rei verſatur, ipſa curuae ductae longitudo erit $\frac{c}{b} \int V(dX^2 + dY^2) = \frac{c}{b} S$, quae omnes quatuor quantitates manifeſto ſunt algebraicae.

§. 9. Inueſtigemus igitur in genere omnes relationes inter X et Y, vnde quantitas S reſultet algebraica. Hunc in finem ſtatuamus ſecundum praecepta olim tradita $dY = p\,dX$, fietque $dS = dX V(1 + pp)$, quae ambae formulae differentiales reddi debent integrabiles. Hunc in finem vtamur reductione conſueta, quae dat

$$Y = pX - \int X\,dp \text{ et } S = X V(1 + pp) - \int \frac{X p\,dp}{V(1 + pp)}.$$

Iam ſtatuamus

$$\int X\,dp = P \text{ et } \int \frac{X p\,dp}{V(1 + pp)} = Q,$$

ita vt fiat

$$Y = pX - P \text{ et } S = X V(1 + pp) - Q,$$

ſicque efficiendum erit, vt ambae quantitates P et Q euadant algebraicae. Ex binis autem poſtremis formulis integralibus deducimus $X = \frac{dP}{dp}$, ex altera vero $X = \frac{dQ V(1 + pp)}{p\,dp}$, qui duo valores inter ſe aequati praebent $p\,dP = dQ V(1 + pp)$, ex qua aequatione colligitur

$$p = \frac{dQ}{V(dP^2 - dQ^2)} \text{ et } V(1 + pp) = \frac{dP}{V(dP^2 - dQ^2)}.$$

Hinc ergo ſi pro Q accipiatur functio quaecunque algebraica ipſius P, omnes iſtae formulae euadent algebraicae,

ſicque noſtrum problema generaliter reſoluetur ſequenti modo.

Solutio quaeſtionis propoſitae.

§. 10. Introducta noua variabili P, eius pro lubitu ſumatur functio quaecunque algebraica Q, indeque ſtatuatur $dQ = q\,dP$, ita vt etiam q ſit functio algebraica ipſius P; tum hinc quaeratur quantitas

$$p = \frac{dQ}{\sqrt{(dP^2 - dQ^2)}} = \frac{q}{\sqrt{(1-qq)}},$$

vnde fiet $dp = \frac{dq}{(1-qq)^{\frac{1}{2}}}$, vbi quia q eſt functio ipſius P, ſi ſtatuatur $dq = r\,dP$, fiet $dp = \frac{r\,dP}{(1-qq)^{\frac{1}{2}}}$, atque hinc porro colligimus $X = \frac{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}{r}$, quo valore inuento reperietur porro

$$Y = \tfrac{q(1-qq)}{r} - P \text{ et } S = \tfrac{1-qq}{r} - Q.$$

§. 11. Cum nunc omnes iſtae formulae ſint functiones algebraicae ipſius P, ex his valoribus primo definiatur angulus ω, vt ſit tang. $\omega = \frac{X}{Y}$, ex eoque porro angulus $\Phi = \frac{c}{b}\omega$, atque hinc ternae coordinatae pro quouis puncto curuae quaeſitae Z erunt vti iam ſupra indicauimus:

1°. $AX = x = \frac{a}{b}\sqrt{(X^2 + Y^2)}$;
2°. $XY = y = \text{cof. } \Phi\sqrt{(X^2 + Y^2)}$;
3°. $YZ = z = \text{ſin. } \Phi\sqrt{(X^2 + Y^2)}$;

at

at vero longitudo curuae in ſuperficie coni hoc modo deſcriptae erit

$$= \frac{c}{b} \cdot S = \frac{c}{b} X \sqrt{(1 + pp)} - \frac{c}{b} Q.$$

Hae autem formulae eo laborant incommodo, vt curua inde nata vehementer fiat complicata, etiamſi pro Q functiones ſatis ſimplices ipſius P accipiantur, quam ob rem non incongruum erit ſolutiones ſimpliciores aliunde repetere.

Solutio

ſpecialis ſimpliciſſima.

§. 12. Quoniam res eo eſt perducta, vt formula $\sqrt{(dX^2 + dY^2)}$ reddatur integrabilis, ſine vllis ambagibus ſtatim perſpicitur, hoc fieri ſtatuendo $dY = n\,dX$, vnde fit $Y = nX + f$; tum enim erit $dS = dX\sqrt{(1 + nn)}$, ideoque $S = X\sqrt{(1 + nn)} + g$, vbi pro n numerum quemcunque aſſumere licet. Ex his valoribus ergo quaeratur primo angulus ω vt ſit tang. $\omega = \frac{X}{nX+f}$, ex quo porro formetur alius angulus $\Phi = \frac{c\omega}{b}$, quo inuento denique linea curua quaeſita his formulis determinabitur:

1°. $AX = x = \frac{a}{b}\sqrt{((nn+1)XX + 2nfX + ff)}$;

2°. $XY = y = \text{cof.}\Phi\sqrt{((nn+1)XX + 2nfX + ff)}$;

3°. $YZ = z = \text{ſin.}\Phi\sqrt{((nn+1)XX + 2nfX + ff)}$.

§. 13. Quodſi ſumamus $f = 0$, vt ſit $Y = nX$, tum habebitur tang. $\omega = \frac{1}{n}$, ideoque ipſe angulus ω conſtans; conſtans quoque erit alter angulus $\Phi = \frac{c\omega}{b}$, quem ergo ponere licet $= \alpha$, et iam perinde eſt, ſiue fractio $\frac{c}{b}$ ſit rationalis nec ne; vnde iſta ſolutio ad omnes plane conos

accommodari poterit; tum autem elementa pro curuae conſtructione erunt:

1°. $AX = x = \frac{a X}{b} \sqrt{(nn+1)}$;

2°. $XY = y = X \text{ cof. } \alpha \sqrt{(nn+1)}$; et

3°. $YZ = z = X \text{ ſin. } \alpha \sqrt{(nn+1)}$;

ac denique longitudo curuae $= X \sqrt{(nn+1)} + g$. vnde ob angulum $YXZ = \alpha$ euidens eſt, his formulis indicari, omnes rectas ex vertice coni in eius ſuperficie eductas, hoc caſu eas eſſe, quas vt per ſe perſpicuas iam remouimus. Quando autem littera f non euaneſcit, quoniam aequatio inter X et Y eſt pro linea recta, euidens eſt, his caſibus prodituras eſſe eas lineas in ſuperficie coni ductas, quae ſi ſuperficies in planum explanaretur, futurae eſſent lineae rectae. Vbi autem probe notandum eſt, iſtas lineas cono obuolutas eatenus tantum pro algebraicis haberi poſſe, quatenus ratio $b:c$ eſt rationalis.

§. 14. Atque haec etiam eſt ratio, cur helices Archimedis in ſuperficie cylindri ductae pro algebraicis haberi nequeant, etiamſi, dum ſuperficies in planum explicatur, euadant rectae, quemadmodum etiam circulus baſin conſtituens etiam in rectam euoluitur, cum tamen in ipſa ſuperficie ſit circulus. Ideoque neutiquam rectificabilis; pro cylindro autem ſit fractio $\frac{c}{b}$ infinita, ideoque algebraica eſſe ceſſat.

Solutio
particularis quaeſtionis propoſitae.

§. 15. Cum res eo ſit perducta, vt poſito $dY = p\,dX$ hae duae formulae $p\,dX$ et $dX\sqrt{(1+pp)}$ reddan-

dantur integrabiles, facile perſpicitur, his conditionibus ſatisfieri, ſi capiatur

$$p = \frac{A X^n}{2} - \frac{X^{-n}}{2A};$$

dummodo enim non ſit $n = \pm 1$, formula $p\,dX$ integrationem admittit. Quoniam autem hinc erit

$$V(1 + pp) = \frac{A X^n}{2} + \frac{X^{-n}}{2A}$$

manifeſto quoque altera formula integrationem admittit; tum igitur habebimus:

$$Y = \frac{A}{2(n+1)} X^{n+1} - \frac{1}{2A(1-n)} X^{-n+1} + f \text{ et}$$
$$S = \frac{A}{2(n+1)} X^{n+1} + \frac{1}{2A(1-n)} X^{-n+1} + g.$$

Ex quibus ergo per formulas ſupra expoſitas curua in ſuperficie coni facile deſcribetur, ſi modo fractio $\frac{c}{b}$ fuerit rationalis.

Alia Solutio generalis quaeſtionis propoſitae.

§. 16. Poſtquam negotium perductum eſt ad has formulas:

$$Y = pX - \int X\,dp \text{ et}$$
$$S = X V(1 + pp) - \int \frac{X p\,dp}{V(1+pp)}$$

ſtatuamus vt ante $\int X\,dp = P$ vt fiat $X = \frac{dP}{dp}$, qui valor ſubſtitutus dabit

$$Y = \frac{p\,dP}{dp} - P \text{ et}$$
$$S = \frac{dP}{dp} V(1 + pp) - \int \frac{p\,dP}{V(1+pp)}.$$

Nunc autem per reductiones consuetas reperitur:

$$\int \frac{p\,dP}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{Pp}{\sqrt{(1+pp)}} - \int \frac{P\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

ita vt sit

$$S = \frac{dP}{dp}\sqrt{(1+pp)} - \frac{Pp}{\sqrt{(1+pp)}} + \int \frac{P\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Iam faciamus $\int \frac{P\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \Pi$, existente Π functione quacunque algebraica ipsius p; tum enim erit

$$P = \frac{d\Pi(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp},$$

sicque ex ista functione Π innotesceet functio P, et iam omnibus conditionibus plene est satisfactum.

§. 17. Constituta igitur quantitate variabili p accipiatur pro lubitu eius functio quaecunque algebraica, quae sit Π, ex eaque deriuetur functio $P = \frac{d\Pi(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, quae itidem erit algebraica. Hac vero inuenta habebimus

$$X = \tfrac{dP}{dp},\quad Y = \tfrac{p\,dP}{dp} - P \text{ et}$$
$$S = \tfrac{dP}{dp}\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{Pp}{\sqrt{(1+pp)}} + \Pi,$$

ex quibus vt supra colligatur 1°. $v = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$, deinde vero angulus ω, vt sit tang. $\omega = \frac{X}{Y}$, ex eo vero porro angulus $\Phi = \frac{c\omega}{b}$, quo inuento ternae coordinatae pro curva quaesita in superficie coni describenda erunt:

1°. $AX = x = \frac{a}{b} V(X^2 + Y^2)$,

2°. $XY = y = \text{cof.} \Phi V(X^2 + Y^2)$,

3°. $YZ = z = \text{fin.} \Phi V(X^2 + Y^2)$,

et denique longitudo curuae in ſuperficie coni deſcriptae erit $\frac{c}{b} \int V(dX^2 + dY^2) = \frac{c}{b} S$.

Adhuc alia ſolutio generalis.

ex doctrina angulorum petita.

§. 18. Loco nouae variabilis introducatur angulus θ, ac denotet Θ eius functionem algebraicam quamcunque, ita tamen vt formula $\int \Theta d\theta$ obtineat valorem algebraicum; tum ſtatuatur $dS = \Theta d\theta + \frac{dd\Theta}{d\theta}$, vbi elementum $d\theta$ conſtans ſit aſſumtum; hinc enim erit $S = \int \Theta d\theta + \frac{d\Theta}{d\theta}$, ideoque functio algebraica. Nunc porro ſtatuatur:

$$dX = dS \text{ fin. } \theta \text{ et } dY = dS \text{ cof. } \theta;$$

ſic enim fiet $V(dX^2 + dY^2) = dS$. Hac ratione autem commode vſu venit, vt tam X quam Y algebraice exprimi queant; manifeſtum enim eſt fore

$$X = \frac{d\Theta}{d\theta} \text{ fin. } \theta - \Theta \text{ cof. } \theta \text{ et } Y = \frac{d\Theta}{d\theta} \text{ cof. } \theta + \Theta \text{ fin. } \theta.$$

§. 19. Inuentis hoc modo quantitatibus X et Y, ex iis quaeratur angulus ω, vt ſit

$$\text{tang. } \omega = \frac{X}{Y} = \frac{d\Theta \text{ fin. } \theta - \Theta d\theta \text{ cof. } \theta}{d\Theta \text{ cof. } \theta + \Theta d\theta \text{ fin. } \theta}.$$

Ad quam formulam euoluendam quaeratur angulus η, vt ſit $\text{tang. } \eta = \frac{\Theta d\theta}{d\Theta}$, ideoque $\Theta d\theta = d\Theta \text{ tang. } \eta$, hocque valore ſubſtituto fiet

$$\text{tang. } \omega = \frac{\text{fin. } \theta - \text{tang. } \eta \text{ cof. } \theta}{\text{cof. } \theta + \text{tang. } \eta \text{ fin. } \theta} = \frac{\text{tang. } \theta - \text{tang. } \eta}{1 + \text{tang. } \eta \text{ tang. } \theta},$$

ideo-

ideoque erit tang. $\omega = \text{tang.}(\vartheta - \eta)$, quamobrem habebimus ipſum angulum $\omega = \vartheta - \eta$. Hinc igitur porro erit angulus $\Phi = \frac{c}{b}(\vartheta - \eta)$. Dummodo igitur $\frac{c}{b}$ fuerit fractio rationalis, etiam angulus Φ ita innoteſcet, vt eius ſinum et coſinum exhibere liceat. At vero iſte angulus Φ in figura deſignat angulum YXZ.

§. 20. Deinde quoniam poſuimus rectam $XZ = v$, ſupra vidimus eſſe $v = V(X^2 + Y^2)$, quamobrem fiet $v = \frac{V(d\Theta^2 + \Theta^2 d\vartheta^2)}{d\vartheta}$. Quia autem poſueramus tang. $\eta = \frac{\Theta d\vartheta}{d\Theta}$, erit $d\Theta = \frac{\Theta d\vartheta}{\text{tang.}\eta}$, quo valore ſurrogato colligitur fore

$$v = \frac{\Theta \text{ ſec.}\eta}{\text{tang.}\eta} = \frac{\Theta}{\text{ſin.}\eta},$$

atque hinc ob angulum

$$YXZ = \Phi = \frac{c}{b}(\vartheta - \eta),$$

ſtatim innoteſcunt coordinatae

$$XY = y = \frac{\Theta \text{ coſ.}\Phi}{\text{ſin.}\eta} \text{ et } YZ = z = \frac{\Theta \text{ ſin.}\Phi}{\text{ſin.}\eta}.$$

Denique vero cum ſit $AX = x = \frac{av}{b}$, erit $AX = x = \frac{a\Theta}{b \text{ ſin.}\eta}$. Sicque determinatae ſunt algebraice omnes tres coordinatae x, y et z, quibus elementum curuae quaeſitae Z, definitur, longitudo autem iſtius curuae in ſuperficie coni deſcriptae erit

$$= \frac{c}{b} \cdot S = \frac{c}{b} \int \Theta \, d\vartheta + \frac{c\, d\Theta}{b\, d\vartheta},$$

quae ergo ob $d\Theta = \frac{\Theta d\vartheta}{\text{tang.}\eta}$, erit $= \frac{c}{b}\left(\int \Theta \, d\vartheta + \frac{\Theta}{\text{tang.}\eta}\right)$.

§. 21. Dummodo igitur formula $\int \Theta \, d\vartheta$ integrale algebraicum habeat, curua in ſuperficie coni deſcripta erit rectificabilis, cuius conſtructio in compendium redacta ita ſe habebit:

Sumta

Sumta pro Θ functione quacunque algebraica ipsius Θ, ita vt etiam formula $\int \Theta \, d\theta$ euadat quantitas algebraica, quaeratur angulus η, vt sit tang. $\eta = \frac{\Theta d\theta}{d\Theta}$, quo stabilito ternae coordinatae, quibus singula curuae quaesitae puncta Z determinantur, ita erunt expressae:

1°. $AX = x = \frac{a}{b} \cdot \frac{\Theta}{\text{sin. } \eta}$,

2°. $XY = y = \frac{\Theta \text{ cos. } (\frac{c}{b}(\theta - \eta))}{\text{sin. } \eta}$,

3°. $YZ = Z = \frac{\Theta \text{ sin. } (\frac{c}{b}(\theta - \eta))}{\text{sin. } \eta}$,

longitudo autem curuae hoc modo descriptae erit

$\frac{c}{b} (\int \Theta \, d\theta + \frac{\Theta}{\text{tang. } \eta})$.

Hic vero notasse iuuabit esse $XZ = v = \frac{\Theta}{\text{sin. } \eta}$, et angulum $YXZ = \Phi = \frac{c}{b}(\theta - \eta)$.

§. 22. Haec igitur solutio propter concinnitatem sine dubio longe est anteferenda, cum non solum infinitas curuas rectificabiles exhibeat, sed etiam facile ita adornari queat, vt rectificatio curuae in superficie coni descriptae datam quadraturam, veluti circuli aliusue curuae cuiuscunque inuoluat; tum enim nil aliud opus est, nisi vt formula integralis $\int \Theta \, d\theta$ hanc ipsam quadraturam exprimat. Ex quo perspicuum est, in superficie omnium conorum rectorum, in quibus ratio $b : c$ est rationalis, perinde ac in plano, infinitas duci posse lineas algebraicas, quarum rectificatio vel geometrice assignari possit, vel a data quacunque quadratura pendeat.

DE MIRABILIBVS PROPRIETATIBVS VNCIARVM,

QVAE

IN EVOLVTIONE BINOMII

AD

POTESTATEM QVAMCVNQVE EVECTI

OCCVRRVNT.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema I.

§. 1.

Si pro potestate Binomii ad exponentem n euecti vncias breuitatis gratia litteris α, β, γ, δ, etc. designemus, vt sit

$\alpha = \frac{n}{1}$; $\beta = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$; $\gamma = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$; $\delta = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$; etc.

semper erit

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = \frac{2}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{4n-2}{n},$$

quae

quae expreſſio pro caſibus, quibus n eſt numerus fractus, ita per formulam integralem exhiberi poteſt, vt ſit

$$= \frac{2}{\pi} \cdot 2^{2n} \int \frac{x^{2n}\, dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

hoc integrali ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſo, vbi π denotat peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$.

Hoc theorema eo magis eſt notatu dignum, quod vix vlla via directa patet eius veritatem demonſtrandi.

Explicatio
pro caſibus quibus exponens n eſt numerus integer poſitiuus.

§. 2. Quo vis huius theorematis clarius perſpiciatur, euoluamus caſus ſimpliciores ſequenti modo:

I. Si $n = 1$, erunt vnciae $1, 1$, ideoque vi theorematis eſſe debet

$$1^2 + 1^2 = 2 = \tfrac{2}{1}.$$

II. Si $n = 2$, erunt vnciae $1, 2, 1$, ideoque vi theorematis eſſe debet

$$1^2 + 2^2 + 1^2 = 6 = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{6}{2}.$$

III. Si $n = 3$, erunt vnciae $1, 3, 3, 1$, ideoque vi theorematis eſſe debet

$$1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20 = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{6}{2} \cdot \tfrac{10}{3}.$$

IV. Si $n = 4$, erunt vnciae $1, 4, 6, 4, 1$, ideoque vi theorematis eſſe debet

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70 = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{6}{2} \cdot \tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{14}{4}.$$

V. Si $n = 5$, erunt vnciae 1, 5, 10, 10, 5, 1, ideoque vi theorematis esse debet

$1^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1^2 = 252 = \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{14}{7} \cdot \frac{18}{9}$.

VI. Si $n = 6$, erunt vnciae 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1: ideoque vi theorematis esse debet

$1^2 + 6^2 + 15^2 + 20^2 + 15^2 + 6^2 + 1^2 = 924 = \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{14}{7} \cdot \frac{18}{9} \cdot \frac{22}{11}$.

Corollarium.

§. 3. Cum formula $\frac{2}{1} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{10}{5} \ldots \ldots \frac{4n-2}{n}$ exhibeat maximam vnciam in potestate Binomii ad exponentem $2n$ euecti, theorema nostrum etiam hoc modo enunciari potest:

Si quadrata vnciarum pro potestate exponentis n *in vnam summam colligantur, ea semper aequabitur maximae vnciae in potestate exponentis* 2n *occurrenti.* Ita pro casibus ante euolutis 2 est maxima vncia pro exponente 2; deinde 6 est maxima vncia pro exponente 4; porro 20 est maxima vncia pro exponente 6; similique modo sequens summa 70 est maxima vncia pro exponente 8. et ita porro.

Explicatio theorematis quo exponens n est numerus fractus.

§. 4. Quando exponens n est numerus fractus, series vnciarum in infinitum extenditur, vnde earum quadrata etiam constituent seriem infinitam, cuius summa per formulam illam integralem: $\frac{2}{\pi} \cdot 2^{2n} \int \frac{x^{2n}\, dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, innotescet,

si-

ſiquidem hoc integrale ab $x = 0$ vſque ad $x = 1$ extendatur, id quod vnico exemplo, quo $n = \frac{1}{2}$, oſtendiſſe ſufficiet; tum autem erit

$$\alpha = \frac{1}{2}; \ \beta = -\frac{1.1}{2.4}; \ \gamma = \frac{1.1.3}{2.4.6}; \ \delta = -\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}; \ \varepsilon = \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}; \text{ etc.}$$

quarum igitur valorum quadrata conſtituent hanc ſeriem:

$$1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.1^2}{2^2.4^2} + \frac{1^2.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1^2.1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} + \frac{1^2.1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2} + \text{etc.}$$

cuius ergo ſumma ex formula integrali:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x\,x)}}, \text{ extenſa ab } x = 0 \text{ ad } x = 1,$$

eſt petenda. Eſt vero

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x\,x)}} = 1 - \sqrt{(1-x\,x)},$$

quare facto iam $x = 1$ eius valor euadit $= 1$. Quocirca ſumma ſerici inuentae erit $= \frac{4}{\pi}$, cuius valor per fractionem decimalem eſt 1,273230; atque ad hunc valorem continuo magis appropinquabitur, quo plures termini ſerici $1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +$ etc. actu colligentur; qui calculus quo facilius inſtituatur, ob $\alpha\alpha = \frac{1}{4}$, notetur eſſe

$$\beta\beta = \frac{1}{16}\alpha\alpha; \ \gamma\gamma = \frac{3^2}{6^2}\beta\beta = \frac{1}{4}\beta\beta; \ \delta\delta = \frac{25}{64}\gamma\gamma;$$
$$\varepsilon\varepsilon = \frac{49}{100}\delta\delta; \ \zeta\zeta = \frac{81}{144}\varepsilon\varepsilon; \ \eta\eta = \frac{121}{196}\zeta\zeta, \text{ etc.}$$

quo obſeruato calculus ſequenti modo inſtituatur:

$1 =$	1,000000
$\alpha\alpha =$	0,250000
$\beta\beta =$	0,015625
$\gamma\gamma =$	0,003906
$\delta\delta =$	0,001526
$\varepsilon\varepsilon =$	0,000748
$\zeta\zeta =$	0,000420
$\eta\eta =$	0,000260
$\theta\theta =$	0,000172
Summa $=$	1,272657.

Haec summa deficit a vero valore hac fractione: 0,000573, quae ergo aequalis censenda est omnibus sequentibus terminis, quos hic praetermisimus, id quod sufficit ad veritatem nostri asserti comprobandam.

§. 5. Si exponenti n alios valores fractos tribuere vellemus, vt $2n$ non amplius foret numerus integer, tunc summa seriei non amplius a quadratura circuli, sed a quadraturis altioribus penderet. Caeterum hic notasse iuuabit, si sumeremus $n = -\frac{1}{4}$, vnde fieret

$$\alpha = -\tfrac{1}{2};\ \beta = \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4};\ \gamma = -\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6};\ \delta = \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8};\ \text{etc.}$$

tum summam huius seriei:

$$1 + \tfrac{1^2}{2^2} + \tfrac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2} + \tfrac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \tfrac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} + \text{etc.}$$

in infinitum excrescere, quemadmodum etiam nostra formula integralis indicat, quippe quae fit $\frac{1}{\pi}\int \frac{dx}{x\sqrt{(1-xx)}}$. Reperitur vero

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2} l \frac{1-\sqrt{(1-xx)}}{1+\sqrt{(1-xx)}} + C,$$

quae constans ita capi debet, vt euanescat posito $x = 0$, ex quo fiet $C = -\frac{1}{2} l 0$, ideoque $C = \infty$. Statuamus nunc $x = 1$, et iste valor prodibit $= \infty$.

§. 6. Sin autem statuamus $n = \frac{3}{4}$, vt fiat

$$\alpha = \tfrac{3}{4};\ \beta = \tfrac{3\cdot 1}{4\cdot 4};\ \gamma = -\tfrac{3\cdot 1\cdot 3}{4\cdot 4\cdot 8};\ \delta = \tfrac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8};\ \varepsilon = -\tfrac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8\cdot 10};\ \text{etc.}$$

tum summa seriei $1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.}$ erit $\frac{16}{\pi}\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Est autem

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \text{const.} - \sqrt{(1-xx)} + \tfrac{1}{3}(1-xx)^{\frac{3}{2}},$$

vbi capi debet $C = \frac{2}{3}$. Facto nunc $x = 1$, erit summa nostrae seriei $= \frac{32}{3\pi}$.

§. 7.

§. 7. Si exponenti n maiores huiusmodi valores, veluti $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$; $\frac{11}{2}$; etc. tribuere velimus, notetur in genere esse

$$\int \frac{x^{i+2}\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = -\frac{x^{i+1}\sqrt{(1-xx)}}{i+2} + \frac{(i+1)}{(i+2)}\int \frac{x^i\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}.$$

Vnde si integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendantur, erit

$$\int \frac{x^{i+2}\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{i+1}{i+2}\int \frac{x^i\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}.$$

Quare cum casu $i = 1$ sit

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1$$

erit pro sequentibus formulis:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2}{3}$$
$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{3\cdot 4}{3\cdot 5}$$
$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{3\cdot 4\cdot 6}{2\cdot 5\cdot 7}$$
$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{3\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$$

etc.

His igitur praenotatis, si ponamus breuitatis gratia

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{ etc. } = S,$$

erit vt sequitur:

I. Pro casu $n = \frac{1}{2}$, erit $S = \frac{4}{\pi}$.

II. Pro casu $n = \frac{3}{2}$, erit $S = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2}{3}$.

III. Pro casu $n = \frac{5}{2}$, erit $S = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{16}{15}$.

IV. Pro casu $n = \frac{7}{2}$, erit $S = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{24}{7}$.

V. Pro casu $n = \frac{9}{2}$, erit $S = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{24}{7}\cdot\frac{32}{9}$.

etc. etc.

§. 8.

§. 8. Ex superiori integralium reductione etiam ratio nostrae formulae integralis in theoremate datae reddi potest; cum enim in genere sit

$$\int \frac{x^{i+2}\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{i+1}{i+2}\int \frac{x^i\,dx}{\sqrt{(1-xx)}},$$

casu autem $i = 0$ fiat $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}$, erit vt sequitur:

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2},$$
$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4},$$
$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6},$$
$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8},$$
$$\int \frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10},$$
etc. etc.

Quodsi iam exponenti n successiue numeros integros, 1, 2, 3, 4, etc. tribuamus, indeque concludamus valorem nostrae seriei

$$1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{ etc.} = S = \frac{2}{\pi}\cdot 2^{2n}\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{(1-xx)}},$$

reperiemus pro S hos valores:

I. Pro casu $n = 1$ erit $S = 2$.
II. Pro casu $n = 2$ erit $S = \frac{2}{1}\cdot\frac{6}{3}$.
III. Pro casu $n = 3$ erit $S = \frac{2}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{3}$.
IV. Pro casu $n = 4$ erit $S = \frac{2}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{5}\cdot\frac{14}{4}$.
V. Pro casu $n = 5$ erit $S = \frac{2}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{5}\cdot\frac{14}{4}\cdot\frac{18}{5}$.
etc. etc.

Vnde

Vnde patet pro quouis exponente integro n fore

$$S = \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{10}{6} \cdot \text{- - - - - } \frac{4n-2}{n},$$

prorſus vti in theoremate ſtatuimus.

Scholion.

§. 9. Quemadmodum hic pro caſibus, quibus exponens n eſt numerus fractus, ſummam noſtrae ſerici per formulam integralem repraeſentauimus, quae iam involuit peripheriam circuli π, ita etiam pluribus modis valor eiusdem ſummae S per alias formulas integrales exprimi poteſt, quarum aliquas hic adiungamus. Prima ſcilicet eſt

$$\text{I. } S = \frac{2}{n \int x^{n-1} dx (1-x)^{n-1}}.$$

$$\text{II. } S = \frac{1}{n \int x^{n} dx (1-x)^{n-1}}.$$

$$\text{III. } S = \frac{1}{(2n+1) \int x^{n} dx (1-x)^{n}}.$$

Vbi quidem, vt ante, has formulas integrales a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extendi oportet. Ita pro caſu $n = 1$ prima harum formarum praebet $S = \frac{2}{\int dx} = \frac{2}{1}$; ſecunda vero formula dat $S = \frac{1}{\int x \, dx} = \frac{2}{1}$; tertia porro formula dat $S = \frac{1}{3 \int x \, dx (1-x)}$. Eſt vero

$$\int x \, dx (1-x) = \frac{1}{2} x x - \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{6},$$

ex quo fit $S = \frac{2}{1}$.

Conſideremus hic etiam caſum $n = 1$, ac prima iſtarum formularum praebet $S = \frac{4}{\int \frac{dx}{\sqrt{(x - xx)}}}$. Poſito autem hic $x = yy$, fit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x - xx)}} = 2\int \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}} = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

ſicque erit $S = \frac{4}{\pi}$, prorſus vti ſupra eſt inuentum. Contemplemur adhuc caſum $n = 3$ ac prima harum formularum dabit $S = \frac{2}{3\int x\,x\,dx\,(1-x)^2}$. Eſt vero

$$\int x\,x\,dx\,(1-x)^2 = \frac{1}{30},$$

hincque ergo erit $S = 20$, vt ſupra.

Theorema II.

§. 10. Manentibus litteris α, β, γ, δ, etc. vnciis pro poteſtate exponentis n, ſi ſimili modo litterae α', β', γ', δ', etc. denotent vncias pro poteſtate exponentis n'; hincque formetur iſta ſeries:

$$1 + \alpha\,\alpha' + \beta\,\beta' + \gamma\,\gamma' + \delta\,\delta' + \text{ etc.}$$

eius ſumma aequabitur iſti producto:

$$\frac{n+n'}{1} \cdot \frac{n+n'-1}{2} \cdot \frac{n+n'-2}{3} \cdot \frac{n+n'-3}{4} \cdot \ldots \frac{n'+1}{n},$$

quae eadem ſumma etiam per ſequentes formulas integrales exprimi poteſt:

ſiue per $\frac{1}{n\int x^{n'}\,dx\,(1-x)^{n-1}}$,

ſiue per $\frac{n+n'}{n\,n'\int x^{n'-1}\,dx\,(1-x)^{n-1}}$,

ſiue per $\frac{1}{(n+n'+1)\int x^{n'}\,dx\,(1-x)^{n}}$,

vbi

vbi integralia ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ sunt extendenda.

Explicatio.

pro casibus, quibus exponentes n et n' sunt numeri integri positiui.

§. 11. Quo exempla huius theorematis clarius ob oculos ponamus, quoniam casus, quo $n' = n$, iam in primo theoremate sunt euoluti, differentiam inter hos exponentes n et n' statuamus primo $= 1$, vt sit $n' = n + 1$, et percurramus sequentes casus:

I. Sit $n = 1$ - - - - - - $1, 1$
$n' = 2$ - - - - - - $1, 2, 1$

erit series $1, + 2 + 0 = 3$.

Cum igitur sit $n + n' = 3$, productum datum euadit $\frac{1}{1}$, vti requiritur.

II. Sit $n = 2$ - - - - - - $1 + 2 + 1$
$n' = 3$ - - - - - - $1 + 3 + 3 + 1$

hinc series $1 + 6 + 3 + 0 = 10$

verum ob $n + n' = 5$ productum illud fit $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2}$.

III. Sit $n = 3$ - - - - - $1 + 3 + 3 + 1$
$n' = 4$ - - - - - $1 + 4 + 6 + 4 + 1$

ergo series $1 + 12 + 18 + 4 + 0 = 35$

at ob $n + n' = 7$ nostrum productum euadit $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

IV. Sit $n = 4 - - - - 1 + 4 + 6 + 4 + 1$
$n' = 5 - - - - 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$

ergo series $1 + 20 + 60 + 40 + 5 + 0 = 126$

at ob $n + n' = 9$ noſtrum productum erit $= \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}$.

V. Sit $n = 5 - - - - 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$
$n' = 6 - - - - 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$

ergo ſeries $1 + 30 + 150 + 200 + 75 + 6 + 0 = 462$

hinc ob $n + n' = 11$ noſtrum productum erit $\frac{11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5}$.

etc.

§. 12. Statuamus nunc $n' = n + 2$ et productum exhibitum fiet

$$\frac{2n+2}{1} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n}{3} \cdot \ldots \ldots \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Hinc igitur percurramus ſequentes caſus:

I. Sit $n = 1 - - - - 1 + 1$
$n' = 3 - - - - 1 + 3 + 3 + 1$

ergo ſeries $1 + 3 + 0 = 4$

productum autem noſtrum fit $\frac{4}{1}$.

II. Sit $n = 2 - - - - 1 + 2 + 1$
$n' = 4 - - - - 1 + 4 + 6 + 4 + 1$

ergo ſeries $1 + 8 + 6 + 0 = 15$

at productum noſtrum $= \frac{6.5}{1.2} = 15$.

III. Sit $n = 3 - - - - 1 + 3 + 3 + 1$
$n' = 5 - - - - 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$

ergo ſeries $1 + 15 + 30 + 10 + 0 = 56$

at productum noſtrum fit $= \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$.

IV.

IV. Sit $n = 4$ - - - - $1 + 4 + 6 + 4 + 1$
$n' = 6$ - - - - $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6$

ergo ſeries $1 + 24 + 90 + 80 + 15 + 0 = 210$

at productum noſtrum erit $= \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}$.

V. Sit $n = 5$ - - - - $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$
$n' = 7$ - - - - $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7$

ergo ſeries $1 + 35 + 210 + 350 + 175 + 21 + 0 = 792$

at productum noſtrum fiet $= \frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} = 792$.

etc. etc.

Explicatio

pro caſibus, quibus alter exponens n' eſt numerus fractus.

§. 13. Sufficiat hic ſumſiſſe $n' = -\frac{1}{2}$, vnde ſeries vnciarum

$1 + \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' +$ etc. erit

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} -$ etc.

His igitur terminis ſingulatim in ſeriem

$1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc.

ductis, orietur iſta ſeries:

$1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1.3}{2.4}\beta - \frac{1.3.5}{2.4.6}\gamma + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\delta -$ etc.

cuius ergo ſumma aequabitur huic producto:

$$\frac{n-\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{n-\frac{3}{2}}{2} \cdot \frac{n-\frac{5}{2}}{3} \text{ - - - } \frac{\frac{1}{2}}{n}$$

ſiue

$$\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{4} \cdot \frac{2n-5}{6} \cdot \frac{2n-7}{8} \cdot \ldots \ldots \ldots \frac{1}{2n}$$

quod quomodo eueniat ſequentibus caſibus examinemus:

I. Sit $n = 1$, hincque $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, etc. vnde noſtra ſeries erit $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; at vero noſtrum productum erit $= \frac{1}{2}$.

II. Sit $n = 2$, erit $\alpha = 2$; $\beta = 1$; $\gamma = 0$; etc. vnde noſtra ſeries prodit $= 1 - \frac{2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$; at vero productum noſtrum euadit $= \frac{3}{8}$.

III. Sit $n = 3$, ideoque $\alpha = 3$; $\beta = 3$; $\gamma = 1$; $\delta = 0$ etc. vnde ſeries prodit $= 1 - \frac{3}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{5}{16}$. at vero productum noſtrum euadit $= \frac{5}{16}$.

IV. Sit $n = 4$, ideoque $\alpha = 4$; $\beta = 6$; $\gamma = 4$; $\delta = 1$; $\varepsilon = 0$; etc. vnde ſeries erit

$$1 - \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{3}{8} \cdot 6 - \frac{5}{16} \cdot 4 + \frac{35}{128} \cdot 1 = \frac{35}{128},$$

productum autem noſtrum erit

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{35}{128}.$$

Explicatio
pro caſibus, quibus ambo exponentes ſunt numeri fracti.

§. 14. Sufficiat hic ſolum caſum euoluiſſe, quo $n = \frac{1}{2}$ et $n' = -\frac{1}{2}$. Hic igitur pro $n = \frac{1}{2}$ ſeries vnciarum erit:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \text{etc.}$$

verum pro exponente $n' = -\frac{1}{2}$ ſeries vnciarum erit:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \text{etc.}$$

Ex

Ex his igitur binis seriebus combinatis orietur series in theoremate commemorata:

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \text{etc.}$$

quae ergo series in infinitum excurrit; et quoniam n non est numerus integer, producto theorematis vti non licet; quam ob rem ad formulas integrales in theoremate exhibitas erit recurrendum, quarum prima pro summa huius seriei praebet $\frac{2}{\int \frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}}$;

secunda forma dat $\frac{-40}{\int \frac{dx}{x\sqrt{(x-xx)}}}$;

tertia autem forma dat $\frac{1}{\int \frac{dx\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{x}}}$.

Vbi quidem haec integralia a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ sunt extendenda, quae quia eundem valorem producere debent, secundam formulam hic praetermitti conueniet.

§. 15. Euoluamus igitur formulam primam $\frac{2}{\int \frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}}$, pro qua statuamus $x = yy$, vt prodeat $\frac{1}{\int \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}}$. Notum autem est esse pro terminis assignatis $\int \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{\pi}{2}$, quam ob rem valor nostrae seriei erit $\frac{1}{\pi}$. Tertia autem formula, quae erat $\frac{1}{\int \frac{dx\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{x}}}$, posito $x = yy$ fiet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} \sqrt{(1-x)} = 2 \int dy \sqrt{(1-yy)}$$

at

at vero haec formula $\int dy \sqrt{(1-yy)}$ exprimit aream quadrantis, cuius radius $= 1$, quae cum sit $= \frac{1}{4}\pi$, erit summa noſtrae ſeriei $\frac{2}{\pi}$, vt ante.

§. 16. Hinc igitur patet, ſummam ſeriei inuentae eſſe $= \frac{2}{\pi}$. Quare ſi ſeriem breuitatis gratia ita repraeſentemus:

$$1 - A - B - C - D - F - \text{etc.} = \frac{2}{\pi}, \text{ erit}$$

$$A + B + C + D \text{ etc.} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

Supra autem vidimus eſſe proxime $\frac{4}{\pi} = 1,273230$, vnde fieri debet

$$A + B + C + D + \text{etc.} = 0,363385;$$

hic autem eſt

$$A = \frac{1}{4};\ B = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 5} A;\ C = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6} B;\ D = \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8} C;$$
$$E = \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10} D;\ F = \frac{9\cdot 11}{10\cdot 12} E;\ \text{etc.}$$

Euoluamus igitur ſingulos hos factores in fractionibus decimalibus, eritque

$$A = 0,250000$$
$$B = 0,046875$$
$$C = 0,019531$$
$$D = 0,010680$$
$$E = 0,006729$$
$$F = 0,004626$$

$$\text{Summa} = 0,338441$$

quae adhuc deficit a veritate quantitate $0,024944$; quod mirum non eſt, cum ſequentes termini praetermiſi; quia enim continuo minus decreſcunt, facile tantum diſcrimen parere poſſunt.

Scho-

Scholion.

§. 17. Quae hactenus sunt allata et per complura exempla illustrata, veritatem nostrorum theorematum satis comprobare videntur, etiamsi nulla demonstratio directa proferri posset. Quamquam autem nulla via directa patere videtur, istam veritatem perscrutandi, tamen duplici modo ad completam demonstrationem pertingere licet, quorum alter ipsa natura vnciarum innititur, alter vero ex calculo probabilitatum peti potest. Priorem igitur demonstrandi modum hic dilucide exponamus, qui simul nobis innumerabilia alia theoremata affinia patefaciet.

Definitio.

§. 18. Huiusmodi charactere: $[\frac{p}{q}]$, designabimus productum ex q fractionibus formatum, quarum numeratores, a littera superiori p incipientes, continuo vnitate decrescant, denominatores vero ab vnitate incipientes continuo per vnitatem crescant; vnde intelligitur, istum characterem $[\frac{p}{q}]$ designare istud productum more solito expressum:

$$\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}.\frac{p-2}{3}.\frac{p-3}{4}.\ldots\ldots\ldots\frac{p-q+1}{q}.$$

Corollarium 1.

§. 19. Hac iam ratione vncias singularum potestatum, quas supra litteris α, β, γ, etc. repraesentauimus, sequenti modo satis succincte et eleganter exhibere licebit, quippe quae pro exponente n erunt:

$$\frac{n}{1} = \left[\frac{n}{1}\right]$$
$$\frac{n(n-1)}{1.\ 2} = \left[\frac{n}{2}\right]$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} = \left[\frac{n}{3}\right]$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \left[\frac{n}{4}\right]$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = \left[\frac{n}{5}\right]$$

etc. etc.

Atque hinc intelligitur, cum pro quauis poteſtate vnciarum omnium prima ſemper ſit vnitas, fore iſto nouo repraeſentandi modo $\left[\frac{n}{1}\right] = 1$. Similique modo, cum vltima vnciarum quoque ſit vnitas, erit etiam $\left[\frac{n}{n}\right] = 1$, propterea quod erit

$$\left[\frac{n}{n}\right] = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3.2.1}{1.2.3\ \ldots\ (n-2)(n-1)n}$$

vbi numerator manifeſto denominatori eſt aequalis.

Corollarium 2.

§. 20. Cum, quoties exponens n eſt numerus integer poſitiuus, tam omnes vnciae primam antecedentes, quam vltimam ſequentes, ſint nihilo aequales, iuxta nouum hunc exprimendi modum perpetuo erit

$$\left[\frac{n}{-1}\right] = 0;\ \left[\frac{n}{-2}\right] = 0;\ \left[\frac{n}{-3}\right] = 0;\ \text{etc.}$$

ita vt, denotante i numerum integrum poſitiuum quemcunque, ſemper ſit $\left[\frac{n}{-i}\right] = 0$. Simili modo pro vnciis vltimam ſequentibus ſemper erit

$$\left[\frac{n}{n+1}\right] = 0;\ \left[\frac{n}{n+2}\right] = 0;\ \left[\frac{n}{n+3}\right] = 0;\ \left[\frac{n}{n+4}\right] = 0;\ \text{etc.}$$

atque adeo in genere erit $\left[\frac{n}{n+i}\right] = 0$.

Lem-

Lemma 1.

§. 21. Recepto iſto ſignandi modo ſemper erit $[\frac{p}{q}] = [\frac{p}{p-q}]$. Cum enim ſit

$$[\tfrac{p}{q}] = \tfrac{p}{1.}\tfrac{(p-1)}{2.}\tfrac{(p-2)}{3.}\tfrac{(p-3)}{4}\ldots\ldots\tfrac{(p-q+1)}{q};$$

ſimilique modo

$$[\tfrac{p}{p-q}] = \tfrac{p}{1.}\tfrac{(p-1)}{2.}\tfrac{(p-2)}{3.}\tfrac{(p-3)}{4}\ldots\ldots\tfrac{(q+1)}{(p-q)};$$

hae duae expreſſiones manifeſto inter ſe ſunt aequales; per crucem enim multiplicando, prior numerator in denominatorem poſteriorem ductus praebet productum

$$1.\,2.\,3.\ldots(p-q)(p-q+1)(p-q+2)\ldots p$$

vbi factores ſine vlla interruptione continuo vnitate creſcunt, ita vt iſtud productum ſit $1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots p$. Simili modo denominator prior ductus in numeratorem poſteriorem dat iſtud productum:

$$1.\,2.\,3.\,4\ldots q.(q+1)(q+2)\ldots p$$

quod itidem eſt $1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots p$, vt ante; ſicque aequalitas harum duarum formularum $[\frac{p}{q}]$ et $[\frac{p}{p-q}]$ eſt demonſtrata.

Corollarium.

§. 22. Hoc iam Lemma manifeſto continet rationem, cur vnciae omnium ordinum, ſiue directe ſiue retro ſcriptae, eadem lege progrediantur.

Lemma 2.

§. 23. Introducta eadem vncias deſignandi ratione ſemper erit

$$[\tfrac{p}{q}] + [\tfrac{p}{q-1}] = [\tfrac{p+1}{q}].$$

Cum enim fit

$$\left[\frac{p}{q}\right] = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)\ldots\ldots(p-q+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ \ldots\ q} \text{ et}$$

$$\left[\frac{p}{q-1}\right] = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)\ldots\ldots(p-q+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ \ldots\ q-1},$$

prior forma aequatur posteriori ductae in $\frac{p-q+1}{q}$, ideoque erit

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{p}{q-1}\right] = \left[\frac{p}{q-1}\right]\left(1 + \frac{p-q+1}{q}\right) = \left[\frac{p}{q-1}\right] \cdot \left(\frac{p+1}{q}\right),$$

quocirca habebimus

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{p}{q-1}\right] = \left(\frac{p+1}{q}\right) \cdot \frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q+2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ q-1},$$

quae forma manifesto conuenit cum hac:

$$\frac{(p+1)p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ \ldots\ q}$$

quae ergo, more signandi recepto, ita refertur: $\left[\frac{p+1}{q}\right]$, ita vt fit $\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{p}{q-1}\right] = \left[\frac{p+1}{q}\right]$.

Corollarium 1.

§. 24. Si loco q scribamus $q+1$, formulis permutatis erit

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{p}{q+1}\right] = \left[\frac{p+1}{q+1}\right]$$

similique modo, numerum q continuo vnitate augendo, erit etiam vt sequitur:

$$\left[\frac{p}{q+1}\right] + \left[\frac{p}{q+2}\right] = \left[\frac{p+1}{q+2}\right];$$

$$\left[\frac{p}{q+2}\right] + \left[\frac{p}{q+3}\right] = \left[\frac{p+1}{q+3}\right];$$

$$\left[\frac{p}{q+3}\right] + \left[\frac{p}{q+4}\right] = \left[\frac{p+1}{q+4}\right];$$

$$\left[\frac{p}{q+4}\right] + \left[\frac{p}{q+5}\right] = \left[\frac{p+1}{q+5}\right];$$

$$\left[\frac{p}{q+5}\right] + \left[\frac{p}{q+6}\right] = \left[\frac{p+1}{q+6}\right];$$

etc. etc.

Corol-

Corollarium 2.

§. 25. Quodſi harum aequalitatum binas ſe inſequentes addamus, prodibunt iſtae nouae aequationes:

$$\left[\frac{p}{q}\right] + 2\left[\frac{p}{q+1}\right] + \left[\frac{p}{q+2}\right] = \left[\frac{p+1}{q+1}\right] + \left[\frac{p+1}{q+2}\right] = \left[\frac{p+2}{q+2}\right]$$
$$\left[\frac{p}{q+1}\right] + 2\left[\frac{p}{q+2}\right] + \left[\frac{p}{q+3}\right] = \left[\frac{p+1}{q+2}\right] + \left[\frac{p+1}{q+3}\right] = \left[\frac{p+2}{q+3}\right]$$
$$\left[\frac{p}{q+2}\right] + 2\left[\frac{p}{q+3}\right] + \left[\frac{p}{q+4}\right] = \left[\frac{p+1}{q+3}\right] + \left[\frac{p+1}{q+4}\right] = \left[\frac{p+2}{q+4}\right]$$
$$\left[\frac{p}{q+3}\right] + 2\left[\frac{p}{q+4}\right] + \left[\frac{p}{q+5}\right] = \left[\frac{p+1}{q+4}\right] + \left[\frac{p+1}{q+5}\right] = \left[\frac{p+2}{q+5}\right]$$
$$\left[\frac{p}{q+4}\right] + 2\left[\frac{p}{q+5}\right] + \left[\frac{p}{q+6}\right] = \left[\frac{p+1}{q+5}\right] + \left[\frac{p+1}{q+6}\right] = \left[\frac{p+2}{q+6}\right]$$
$$\left[\frac{p}{q+5}\right] + 2\left[\frac{p}{q+6}\right] + \left[\frac{p}{q+7}\right] = \left[\frac{p+1}{q+6}\right] + \left[\frac{p+1}{q+7}\right] = \left[\frac{p+2}{q+7}\right]$$
$$\left[\frac{p}{q+6}\right] + 2\left[\frac{p}{q+7}\right] + \left[\frac{p}{q+8}\right] = \left[\frac{p+1}{q+7}\right] + \left[\frac{p+1}{q+8}\right] = \left[\frac{p+2}{q+8}\right]$$

etc. etc.

Corollarium 3.

§. 26. Quodſi denuo binas harum aequalitatum ſe inſequentes addamus, reperiemus primo:

$$\left[\frac{p}{q}\right] + 3\left[\frac{p}{q+1}\right] + 3\left[\frac{p}{q+2}\right] + \left[\frac{p}{q+3}\right] = \left[\frac{p+2}{q+2}\right] + \left[\frac{p+2}{q+3}\right] = \left[\frac{p+3}{q+3}\right].$$

Simili modo prodibunt ſequentes aequationes:

$$\left[\frac{p}{q+1}\right] + 3\left[\frac{p}{q+2}\right] + 3\left[\frac{p}{q+3}\right] + \left[\frac{p}{q+4}\right] = \left[\frac{p+3}{q+4}\right].$$

Eodemque modo porro:

$$\left[\frac{p}{q+2}\right] + 3\left[\frac{p}{q+3}\right] + 3\left[\frac{p}{q+4}\right] + \left[\frac{p}{q+5}\right] = \left[\frac{p+3}{q+5}\right];$$

parique modo vlterius progredi licebit, quousque libuerit; atque hinc ſequens problema reſoluere poterimus.

Problema.

§. 27. Sumtis pro p et q numeris quibuscunque integris poſitiuis, ſi praeterea littera n etiam huiusmodi numerum

quemcunque denotet, inueſtigare ſummam iſtius ſeriei:

$$\left[\begin{smallmatrix}n\\0\end{smallmatrix}\right].\left[\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}n\\1\end{smallmatrix}\right].\left[\begin{smallmatrix}p\\q+1\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}n\\2\end{smallmatrix}\right].\left[\begin{smallmatrix}p\\q+2\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}n\\3\end{smallmatrix}\right].\left[\begin{smallmatrix}p\\q+3\end{smallmatrix}\right]+\text{etc.}$$

Solutio.

Cum ſit $\left[\begin{smallmatrix}n\\0\end{smallmatrix}\right]=1$, et iſtae formulae:

$\left[\begin{smallmatrix}n\\0\end{smallmatrix}\right]$; $\left[\begin{smallmatrix}n\\1\end{smallmatrix}\right]$; $\left[\begin{smallmatrix}n\\2\end{smallmatrix}\right]$; $\left[\begin{smallmatrix}n\\3\end{smallmatrix}\right]$; etc.

exhibeant vncias pro poteſtate exponentis n, in Corollariis praecedentibus vidimus, fore pro caſu $n=1$

I. $\left[\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}p\\q+1\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}p+1\\q+1\end{smallmatrix}\right]$;

tum vero pro caſu $n=2$ Corollarium ſecundum dedit:

II. $\left[\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right]+2\left[\begin{smallmatrix}p\\q+1\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}p\\q+2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}p+2\\q+2\end{smallmatrix}\right]$;

deinde pro caſu $n=3$ in Corollario III. inuenimus:

III. $\left[\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right]+3\left[\begin{smallmatrix}p\\q+1\end{smallmatrix}\right]+3\left[\begin{smallmatrix}p\\q+2\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}p\\q+3\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}p+3\\q+3\end{smallmatrix}\right]$;

atque ſi in eodem Corollario binas priores aequationes addamus, prodibit pro caſu $n=4$ iſta aequatio:

IV. $\left[\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right]+4\left[\begin{smallmatrix}p\\q+1\end{smallmatrix}\right]+6\left[\begin{smallmatrix}p\\q+2\end{smallmatrix}\right]+4\left[\begin{smallmatrix}p\\q+3\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}p\\q+4\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}p+4\\q+4\end{smallmatrix}\right]$,

vnde iam ſatis luculenter perſpicitur fore pro caſu $n=5$:

V. $\left[\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right]+5\left[\begin{smallmatrix}p\\q+1\end{smallmatrix}\right]+10\left[\begin{smallmatrix}p\\q+2\end{smallmatrix}\right]+10\left[\begin{smallmatrix}p\\q+3\end{smallmatrix}\right]+5\left[\begin{smallmatrix}p\\q+4\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}p\\q+5\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}p+5\\q+5\end{smallmatrix}\right]$,

atque adeo iam in genere pronunciare licet, ſeriei in problemate propoſitae:

$\left[\begin{smallmatrix}n\\0\end{smallmatrix}\right].\left[\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}n\\1\end{smallmatrix}\right].\left[\begin{smallmatrix}p\\q+1\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}n\\2\end{smallmatrix}\right].\left[\begin{smallmatrix}p\\q+2\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}n\\3\end{smallmatrix}\right].\left[\begin{smallmatrix}p\\q+3\end{smallmatrix}\right]+$ etc.

ſummam eſſe $=\left[\begin{smallmatrix}p+n\\q+n\end{smallmatrix}\right]$, qua formula indicatur iſtud productum:

$$\frac{p+n}{1}\cdot\frac{p+n-1}{2}\cdot\frac{p+n-2}{3}\cdot\frac{p+n-3}{4}\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot=\frac{p-q+1}{q+n}.$$

Corol-

Corollarium 1.

§. 28. Cum per Lemma I. in genere ſit $[\frac{p}{q}] = [\frac{p}{p-q}]$,

erit noſtrae ſeriei propoſitae ſumma etiam $= [\frac{p+n}{p-q}]$, qua forma exprimitur iſtud productum:

$$\frac{p+n}{1} \cdot \frac{p+n-1}{2} \cdot \frac{p+n-2}{3} \cdot \frac{p+n-3}{4} \cdot \text{- - - -} \cdot \frac{q+n+1}{p-q}.$$

Corollarium 2.

§. 29. Quodſi ſumamus $q = 0$, iſtae formulae:

$[\frac{p}{0}] + [\frac{p}{1}] + [\frac{p}{2}] + [\frac{p}{3}] +$ etc.

exhibebunt vncias pro poteſtate exponentis p; quae ergo ſi ſingulatim ducantur in vncias pro poteſtate exponentis n, reſultabit iſta ſeries:

$[\frac{n}{0}] \cdot [\frac{p}{0}] + [\frac{n}{1}] \cdot [\frac{p}{1}] + [\frac{n}{2}] \cdot [\frac{p}{2}] + [\frac{n}{3}] \cdot [\frac{p}{3}] +$ etc.

cuius ergo ſumma erit $= [\frac{p+n}{n}]$, vel etiam $[\frac{p+n}{p}]$, quarum formularum illa dat iſtud productum:

$$\frac{p+n}{1} \cdot \frac{p+n-1}{2} + \frac{p+n-2}{3} \cdot \frac{p+n-3}{4} \text{ - - - - } \frac{p+1}{n},$$

altera vero formula euoluta aequatur hunc producto:

$$\frac{p+n}{1} \cdot \frac{p+n-1}{2} \cdot \frac{p+n-2}{3} \cdot \frac{p+n-3}{4} \text{ - - - - } \frac{n+1}{p},$$

ſicque veritas ſecundi theorematis ſupra allati eſt demonſtrata, quoniam litterae α, β, γ, etc. ibi denotabant vncias pro exponente n, alterae vero α', β', γ', etc. pro exponente n', cuius loco hic habemus p.

Corollarium 3.

§. 30. Si praeterea capiamus $p = n$, noſtra ſeries abibit in eam ipſam, quam in theoremate I ſumus contempla-

templati, ſcilicet:

$$1 + \left[\tfrac{n}{1}\right]^2 + \left[\tfrac{n}{2}\right]^2 + \left[\tfrac{n}{3}\right]^2 + \text{etc.}$$

cuius loco ibi habuimus

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.},$$

eius ergo ſumma ex hic allatis erit

$$\left[\tfrac{2n}{n}\right] = \tfrac{2n}{1} \cdot \tfrac{2n-1}{2} \cdot \tfrac{2n-2}{3} \cdot \tfrac{2n-3}{4} \cdot \text{- - - -} \cdot \tfrac{n+1}{n},$$

ſicque etiam theorema I. rigoroſe eſt demonſtratum.

Scholion.

§. 31. In ipſo quidem theoremate primo ſummam ſeriei per aliud productum, ſcilicet:

$$\tfrac{3}{1} \cdot \tfrac{6}{3} \cdot \tfrac{10}{5} \cdot \tfrac{14}{7} \cdot \tfrac{18}{9} \cdot \text{- - - - -} \cdot \tfrac{4n-2}{n},$$

expreſſimus; verum hanc formam cum hic exhibita penitus conuenire facile oſtendi poteſt. Cum enim vtrinque denominatores ſint iidem, demonſtrandum eſt, hoc productum:

$$2n(2n-1)(2n-2) \text{ - - - - - } n+1,$$

ſemper aequale eſſe huic producto:

$$2.\ 6.\ 10.\ 14. \text{ - - - - - } (4n-2).$$

Hunc in finem ponamus prius productum $= P$, ſequens vero, quod oritur, ſi loco n ſcribamus $n+1$, deſignemus littera Q, ita vt ſit

$$Q = (2n+2)(2n+1)\,2n(2n-1)(2n-2) \text{ - - } (n+2),$$

vnde patet fore

$$\tfrac{Q}{P} = \tfrac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = (4n+2), \text{ ideoque}$$

$$Q = (4n+2)P;$$

vnde patet, quomodo ex quouis valore pro n definiatur ſequens valor pro $n+1$. Quare cum pro caſu $n = 1$ illud

iſtud productum P ſit $= 2$; ſequens productum Q erit $= 2.6$, quod ergo valet pro $n = 2$, quod ſi iam denuo vocetur $= P$, ſequens productum Q erit $= 2.6.10$, pro caſu $n = 3$; ſi hoc denuo deſignetur per P, erit ſequens productum $Q = 2.6.10.14$, pro caſu $n = 4$; vnde veritas huius identitatis manifeſto elucet. Caeterum problema, quod modo tractauimus, multo latius patet, quam theoremata initio allata, quare operae pretium erit theorema inde natum hic ob oculos exponere.

Theorema generale.

§. 32. Si litterae p, n et q denotent numeros integros quoscunque, huius ſeriei inde formatae:

$$[\tfrac{n}{0}].[\tfrac{p}{q}]+[\tfrac{n}{1}].[\tfrac{p}{q+1}]+[\tfrac{n}{2}].[\tfrac{p}{q+2}]+\text{ etc.}$$

ſumma ſemper aequalis eſt huic formulae: $[\frac{p+n}{q+n}]$, vel etiam huic: $[\frac{p+n}{p-q}]$, quarum illa praebet iſtud productum:

$$\tfrac{p+n}{1}.\tfrac{p+n-1}{2}.\tfrac{p+n-2}{3}\ -\ -\ -\ -\ \tfrac{p-q+1}{q+n},$$

haec vero iſtud:

$$\tfrac{p+n}{1}.\tfrac{p+n-1}{2}.\tfrac{p+n-2}{3}\ -\ -\ -\ \tfrac{q+n+1}{p-q}.$$

Corollarium 1.

§. 33. Quodſi ergo iſtam ſeriem littera S deſignemus, ita vt ſit

$$S = [\tfrac{n}{0}].[\tfrac{p}{q}]+[\tfrac{n}{1}].[\tfrac{p}{q+1}]+\text{ etc.}$$

erit $S = [\frac{p+n}{q+n}]$. Iam loco p ſcribamus $p+1$, ſeriemque inde natam per S' referamus, ita vt ſit

$$S' = [\tfrac{n}{0}].[\tfrac{p+1}{q}]+[\tfrac{n}{1}].[\tfrac{p+1}{q+1}]+[\tfrac{n}{2}].[\tfrac{p+1}{q+2}]+\text{ etc.}$$

erit $S' = [\frac{p+n+1}{q+n}]$, factaque euolutione erit

$$S' = \frac{p+n+1}{1} \cdot \frac{p+n}{2} \cdot \frac{p+n-1}{3} \cdot - \; - \; - \; - \; \frac{p-q+2}{q+n},$$

vnde colligitur fore

$$\frac{S'}{S} = \frac{p+n+1}{p-q+1}, \text{ ita vt fit}$$

$$S' = \frac{p+n+1}{p-q+1} \cdot S.$$

Corollarium 2.

§. 34. Simili modo si in nostra serie S loco p scribamus $p+2$, ac statuamus:

$$S'' = [\tfrac{n}{0}] \cdot [\tfrac{p+2}{q}] + [\tfrac{n}{1}] \cdot [\tfrac{p+2}{q+1}] + [\tfrac{n}{2}] \cdot [\tfrac{p+2}{q+2}] + [\tfrac{n}{3}] \cdot [\tfrac{p+2}{q+3}] + \text{etc.}$$

erit $S'' = \frac{p+n+2}{p-q+2} S'$, quocirca habebimus nunc

$$S'' = \frac{p+n+1}{p-q+1} \cdot \frac{p+n+2}{p-q+2} \cdot S.$$

Simili modo si denuo litteram p vnitate augeamus, ac statuamus:

$$S''' = [\tfrac{n}{0}] \cdot [\tfrac{p+3}{q}] + [\tfrac{n}{1}] \cdot [\tfrac{p+3}{q+1}] + [\tfrac{n}{2}] \cdot [\tfrac{p+3}{q+2}] + \text{etc.}$$

erit

$$S''' = \frac{p+n+3}{p-q+3} \cdot S'',$$

ideoque habebimus nunc

$$S''' = \frac{p+n+1}{p-q+1} \cdot \frac{p+n+2}{p-q+2} \cdot \frac{p+n+3}{p-q+3} \cdot S.$$

Sicque vlterius progredi licet, quousque libuerit, ita vt per valorem S omnes sequentes: S', S'', S''', S'''', etc. facile exhiberi queant, id quod in sequentibus insignem vsum praestabit.

Pro-

Problema.

§. 35. Si quaepiam litterarum p, q et n, vel duae, vel adeo omnes fuerint fractiones, in verum valorem seriei propositae:

$$S = [\tfrac{n}{0}] \cdot [\tfrac{p}{q}] + [\tfrac{n}{1}] \cdot [\tfrac{p}{q+1}] + [\tfrac{n}{2}] \cdot [\tfrac{p}{q+2}] + \text{etc.}$$

per formulam integralem inquirere.

Solutio.

Supra in Theoremate II. obseruauimus, valorem istius producti:

$$\tfrac{n+n'}{1} \cdot \tfrac{n+n'-1}{2} \cdot \tfrac{n+n'-2}{3} \cdot \text{etc.} \cdot \tfrac{n'+1}{n},$$

aequari vel huic formulae:

I. $$\frac{1}{n \int x^{n'} \, dx \, (1-x)^{n-1}},$$

II. $$\frac{n+n'}{n\,n' \int x^{n'-1} \, dx \, (1-x)^{n-1}},$$ vel huic:

III. $$\frac{1}{(n+n'+1) \int x^{n'} \, dx \, (1-x)^{n}},$$ vel etiam huic:

Cum igitur nostro casu sit

$$S = \tfrac{p+n}{1} \cdot \tfrac{p+n-1}{2} \cdot \tfrac{p+n-2}{3} \cdot \text{etc.} \cdot \tfrac{p-q+1}{q+n},$$

comparatione rite instituta patet, quod ibi fuerat n hic esse $q+n$, et quod ibi fuerat $n+n'$ hic esse $p+n$, ideoque quod ibi fuerat n', hic nobis erit $p-q$; quibus notatis triplici modo valorem ipsius S per formulas integrales exprimere poterimus, quae sunt:

I. $$S = \frac{1}{(q+n) \int x^{p-q} \, dx \, (1-x)^{q+n-1}}.$$

$$\text{II. } S = \frac{p+n}{(p-q)(q+n)\int x^{p-q-1} dx (1-x)^{q+n-1}};$$

$$\text{III. } S = \frac{1}{(p+n+1)\int x^{p-q} dx (1-x)^{q+n}},$$

ſi quidem ſingula haec integralia a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendantur. Perpetuo autem perinde erit, quanam harum trium formularum vti velimus, quandoquidem inter ſe perfecte conueniunt, quemadmodum ex reductione integralium ſatis nota intelligitur. Manifeſtum autem eſt, quaecunque fractiones litteris p, q et n deſignentur, valorem ſummae S ad certam formulam integralem, ſiue quadraturam reuocari.

Corollarium 1.

§. 36. Hinc igitur patet, innumerabiles iſtiusmodi ſeries communem ſummam habere poſſe. Veluti ſi alia quaecunque huius formae ſeries habeatur:

$$[\tfrac{N}{0}] \cdot [\tfrac{P}{Q}] + [\tfrac{N}{1}] \cdot [\tfrac{P}{Q+1}] + [\tfrac{N}{2}] \cdot [\tfrac{P}{Q+2}] + \text{etc.}$$

vt eius ſumma praecedenti quadat aequalis, requiritur primo vt ſit $Q + N = q + n$, ſecundo vt $P - Q = p - q$, ideoque $Q = q + n - N$ et $P = p + n - N$, vbi ergo N arbitrio noſtro relinquitur; ac dummodo litteris P et Q hi valores aſſignentur, ſeries inde reſultans ſemper aequalis erit ſeriei hic ſummatae.

Corollarium 2.

§. 37. Si, vt ante fecimus, loco p ſucceſſiue ſcribamus $p+1$; $p+2$; $p+3$; etc. ac ſummas ſerierum inde

de natarum per S', S'', S''', etc. designemus, hae per formulas integrales sequenti modo exprimentur:

$$\text{I. } S' = \frac{p+n+1}{(p-q+1)(q+n)\int x^{p-q}dx\,(1-x)^{q+n-1}};$$

$$\text{II. } S'' = \frac{(p+n+1)(p+n)}{(p-q+1)(p-q)(q+n)\int x^{p-q-1}dx\,(1-x)^{q+n-1}}$$

$$\text{III. } S''' = \frac{1}{(p-q+1)\int x^{p-q}dx\,(1-x)^{q+n}}.$$

Vnde satis liquet, quomodo etiam sequentes valores S'', S''', etc. exprimi debeant.

Scholion.

§. 38. Quodsi ergo litterae p, q et n denotent numeros integros, euidens est, singulas has formulas actu euadere integrabiles, indeque eadem producta enasci, quae supra pro summa S inuenimus; sin autem inter has litteras fractiones occurrant, summatio ad quadraturas eo altiores reducetur, quo magis fractiones fuerint complicatae; inter quas ii casus imprimis notatu digni occurrunt, quos ad arcus circulares reuocare licet, id quod vsu venit in ista formula:

$$\int \frac{x^{\lambda}}{(1-x)^{\lambda}} \cdot \frac{dx}{x}, \text{ siue } \int x^{\lambda-1}dx\,(1-x)^{-\lambda},$$

ita vt, comparatione cum prima nostrarum formularum facta, sit

$$p-q=\lambda-1 \text{ et } q+n-1=-\lambda,$$

ideoque

$$p=-n \text{ et } q=1-n-\lambda.$$

Pro formula autem $\int \frac{x^\lambda}{(1-x)^\lambda} \cdot \frac{dx}{x}$ integranda ſtatuamus $\frac{x}{1-x} = y$, ſietque hinc $x = \frac{y}{1+y}$ et $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1+y)}$, ideoque formula noſtra euadet $\int \frac{y^{\lambda-1}\,dy}{1+y}$; vbi notetur, caſu $x = 0$ fore $y = 0$, at caſu $x = 1$ fore $y = \infty$, ita vt hoc integrale a termino $y = 0$ vsque ad terminum $y = \infty$ capi oporteat. Quia nunc exponentem λ vt fractum ſpectamus, ponamus $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$, et formula integralis erit $\int \frac{y^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}\,dy}{1+y}$. Hic ſtatuamus porro $y = z^\nu$, vt ſit

$$y^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} = z^{\mu-\nu} \text{ et } dy = \nu z^{\nu-1}\,dz,$$

vnde formula integralis erit $\nu \int \frac{z^{\mu-1}\,dz}{1+z^\nu}$. De hac autem formula notum eſt, eius integrale a termino $z = 0$ vsque ad $z = \infty$ eſſe $= \frac{\pi}{\text{ſin.}\frac{\mu\pi}{\nu}}$; quocirca, quoties fuerit

$$p = -n \text{ et } q = 1 - n - \tfrac{\mu}{\nu},$$

tum valor noſtrae formulae integralis erit

$$\int x^{p-1}\,dx\,(1-x)^{q+n-1} = \frac{\pi}{\text{ſin.}\frac{\mu\pi}{\nu}}$$

vnde ſequens problema reſoluere poterimus.

Problema.

§. 39. Propoſita hac ſerie:

$$S = [{}^{n}_{0}][\tfrac{p}{q}] + [{}^{n}_{1}][\tfrac{p}{q+1}] + [{}^{n}_{2}][\tfrac{p}{q+2}] + \text{ etc.}$$

inue-

inuenire relationem inter numeros p, q et n, vt eius ſumma S per quadraturam circuli exprimi poſſit.

Solutio.

Inter ternas formulas integrales pro ſumma huius ſeriei S ſupra datas prima erat:

$$S = \frac{1}{(q+n)\int x^{p-1}\,dx\,(1-x)^{q+n-1}};$$

modo autem vidimus, quoties fuerit

$$p = -n \text{ et } q = 1 - n - \tfrac{\mu}{\nu},$$

toties fore

$$\int x^{p-1}\,dx\,(1-x)^{q+n-1} = \frac{\pi}{\text{ſin.}\frac{\mu\pi}{\nu}},$$

quo valore ſubſtituto erit

$$S = \frac{\text{ſin.}\frac{\mu\pi}{\nu}}{(q+n)\,\pi} = \frac{\nu\,\text{ſin.}\frac{\mu\pi}{\nu}}{(\nu-\mu)\,\pi}.$$

Quo igitur iſte valor locum habeat, duae conditiones requiruntur, quarum prima poſtulat, vt ſit $p = -n$, ſiue $p + n = 0$, ſecunda vero, vt ſit

$$q = 1 - n - \tfrac{\mu}{\nu}, \text{ ſiue } p - q = \tfrac{\mu}{\nu} - 1.$$

Corollarium.

§. 40. Quodſi ergo iſtae conditiones locum habeant, ſi ſucceſſiue loco p ſcribamus $p+1$; $p+2$; $p+3$; etc., ſummae autem noſtrae ſeriei hinc natae per S', S'', S''' etc. deſignentur, quoniam inuenimus

$$S = \frac{\nu\,\text{ſin.}\frac{\mu\pi}{\nu}}{(\nu-\mu)\,\pi}, \text{ erit}$$

$S' =$

$$S' = \frac{p+n+1}{p-q+s} \cdot \frac{\nu \sin. \frac{\mu\pi}{\nu}}{(\nu-\mu)\pi} = \frac{\nu^2}{\mu(\nu-\mu)\pi} \cdot \sin. \frac{\mu\pi}{\nu};$$

$$S'' = \frac{p+n+2}{p-q+2} \; S' = \frac{2\nu^2}{\mu(\mu+\nu)(\nu-\mu)\pi} \cdot \sin. \frac{\mu\pi}{\nu};$$

$$S''' = \frac{p+n+3}{p-q+3} \; S'' = \frac{1.2.\nu^3}{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(\nu-\mu)\pi} \cdot \sin. \frac{\mu\pi}{\nu};$$

$$S'''' = \frac{p+n+4}{p-q+4} \; S''' = \frac{1.2.3.4.\nu^4}{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(\mu+3\nu)(\nu-\mu)\pi} \cdot \sin. \frac{\mu\pi}{\nu}.$$

etc. etc.

Exemplum.

§. 41. Accommodemus haec ad casum theorematis nostri secundi, pro quo statui debet $q = 0$, vt nanciscamur hanc seriem:

$$S = [\tfrac{\mu}{\nu}]\,[\tfrac{\mu}{1}] + [\tfrac{\mu}{2}]\cdot[\tfrac{\mu}{1}] + [\tfrac{\mu}{3}]\cdot[\tfrac{\mu}{2}] + [\tfrac{\mu}{4}]\cdot[\tfrac{\mu}{3}] + [\tfrac{\mu}{5}]\cdot[\tfrac{\mu}{4}] + \text{etc.}$$

Quia autem erat $q = 1 - n - \frac{\mu}{\nu}$, hic erit

$$n = \frac{\nu-\mu}{\nu}, \text{ ideoque } p = \frac{\mu-\nu}{\nu}.$$

Hic autem commode ipsum numerum n in computo retinere poterimus, ita vt sit $p = -n$, tum autem erit

$$\frac{\mu}{\nu} = 1 - n, \text{ siue } \mu = \nu(1-n),$$

ex quo nostra summa erit $S = \frac{\sin.(1-n)\pi}{n\pi}$, quae ergo est summa huius seriei:

$$S = 1 + [\tfrac{1-n}{1}]\cdot[-\tfrac{n}{1}] + [\tfrac{1-n}{2}]\cdot[-\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{1-n}{3}]\cdot[-\tfrac{n}{3}] + \text{etc.}$$

§. 42. Quodsi nunc numerum p vnitate augeamus, ob $p + 1 = 1 - n$ series nostra erit:

$$S' = 1 + [\tfrac{1-n}{1}]\,[\tfrac{1-n}{1}] + [\tfrac{1-n}{2}]\,[\tfrac{1-n}{2}] + [\tfrac{1-n}{3}]\,[\tfrac{1-n}{3}] + \text{etc.}$$

quamobrem propter $\mu = \nu(1-n)$ erit ista summa:

$$S' = \tfrac{\sin.(1-n)\pi}{n(1-n)\pi}; \text{ vel quia } \sin.(1-n)\pi = \sin. n\pi$$

com-

commodius habebimus

$$S = \frac{\sin. n\pi}{n\pi} \quad \text{et} \quad S' = \frac{\sin. n\pi}{n(1-n)\pi}.$$

§. 43. Quodsi iam porro statuamus

$$S'' = 1 + \left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{2-n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{2-n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right]\left[\frac{2-n}{3}\right] + \text{etc.}$$

reperietur ista summa $S'' = \frac{1.2\sin. n\pi}{n(1-n)(2-n)\pi}$. Simili modo si porro statuamus:

$$S''' = 1 + \left[\frac{n}{1}\right].\left[\frac{3-n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right].\left[\frac{3-n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right].\left[\frac{3-n}{3}\right] + \text{etc.}$$

prodibit ista summa $S''' = \frac{1.2.3\sin. n\pi}{n(1-n)(2-n)(3-n)\pi}$. Hocque modo has series, quovsque lubuerit, continuare licet.

§. 44. Quodsi iam characteres hic brevitatis gratia introductos more solito euoluamus, prima series hanc induet formam:

$$S = 1 - \frac{nn}{1} + \frac{nn(nn-1)}{1.4} - \frac{nn(nn-1)(nn-4)}{1.4.9} + \frac{nn(nn-1)(nn-4)(nn-9)}{1.4.9.16} - \text{etc.} = \frac{\sin. n\pi}{n\pi},$$

cuius summationis ratio aliunde ita ostendi potest. Diuidatur vtrinque per $nn-1$, fietque

$$\frac{S}{nn-1} = -1 + \frac{nn}{4} - \frac{nn(nn-4)}{1.4.9} + \frac{nn(nn-4)(nn-9)}{1.4.9.16} - \frac{nn(nn-4)(nn-9)(nn-16)}{1.4.9.16.25} + \text{etc.}$$

Diuidamus porro vtrinque per $\frac{nn-4}{4}$, fietque

$$\frac{4S}{(nn-1)(nn-4)} = 1 - \frac{nn}{9} + \frac{nn(nn-9)}{9.16} - \frac{nn(nn-9)(nn-16)}{9.16.25} + \text{etc.}$$

Diuidamus porro per $\frac{nn-9}{9}$, prodibitque

$$\frac{4.9S}{(nn-1)(nn-4)(nn-9)} = -1 + \frac{nn}{16} - \frac{nn(nn-16)}{16.25} + \frac{nn(nn-16)(nn-25)}{16.25.36} - \text{etc.}$$

Diuidatur porro per $\frac{nn-16}{16}$, ac prodibit

$$\frac{4.9.16.S}{(nn-1)(nn-4)(nn-9)(nn-16)} = 1 - \frac{nn}{25} + \text{etc.}$$

Quare si istae operationes in infinitum continuentur, orietur tandem ista aequatio:

$$\frac{1.4.9.16.25 \ldots S}{(nn-1)(nn-4)(nn-9)\ \text{etc.}} = \pm 1;$$

quae ambiguitas signi vt tollatur, in singulis factoribus denominatoris signa immutemus, habebimusque

$$\frac{1.4.9.16 \ldots S}{(1-nn)(4-nn)(9-nn)(16-nn)\ \text{etc.}} = +1;$$

quocirca hinc sequitur fore

$$S = \frac{1-nn}{1} \cdot \frac{4-nn}{4} \cdot \frac{9-nn}{9} \cdot \frac{16-nn}{16} \text{ etc. in infinitum,}$$

cuius producti infiniti valorem esse $= \frac{\sin. n\pi}{n\pi}$ iam satis constat. Si enim capiamus hic $n = \frac{1}{2}$, hinc fiet

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \text{etc.}$$

quae est expressio notissima Wallisiana.

Scholion.

§. 45. Hactenus igitur veritatem nostrorum theorematum, quae primo aspectu maxime ardua merito sunt visa, ex planissimis Analyseos principiis solidissime demonstrauimus. Datur autem adhuc alia via ad eundem scopum perducens ex doctrina combinationum deducta, quam quamquam ab instituto non parum aliena videatur, hic clarius exponamus.

Problema.

Si habeatur manipulus schedularum vel chartarum, quarum numerus sit $= s$, inter quas reperiantur n chartae certis

certis signis notatae, atque ex hoc manipulo forte extrahantur k chartae, inuestigare numeros casuum, quibus vel nulla illarum chartarum notatarum inter istas k chartas extractas reperiatur, vel vnica, vel duae tantum, vel tres, vel quatuor etc. vel adeo omnes n, si quidem numerus n non excedat numerum k.

Solutio.

§. 46. Cum numerus omnium chartarum sit $= s$, si inde vnica charta extraheretur, multitudo varietatum foret $= s$; sin autem duae tantum extraherentur, numerus varietatum foret $\frac{s(s-1)}{1.2}$, qui numerus per nostros characteres expressus erit $\left[\frac{s}{2}\right]$; sin autem tres chartae extrahantur, numerus varietatum colligitur esse $= \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3} = \left[\frac{s}{3}\right]$, atque hinc concludimus, si numerus chartarum extractarum fuerit $= k$, numerum omnium varietatum possibilium fore $= \left[\frac{s}{k}\right]$.

§. 47. Cum nunc numerus chartarum notarum sit $= n$, quaeramus primo, quot modis euenire queat, vt earum nulla inter k chartas extractas occurrat; ad hoc inueniendum excludamus omnes chartas signatas ex nostro manipulo integro, et numerus reliquarum chartarum erit $= s - n$, vnde si k chartae extrahantur, numerus omnium varietatum erit $= \left[\frac{s-n}{k}\right]$, qui numerus omnes continet casus, quibus nulla chartarum notatarum inter extractas reperietur.

§. 48. Inuestigemus nunc, quot modis euenire possit, vt vnica charta notata inter extractas reperiatur;

neceſſe igitur eſt, vt reliquae extractae, quarum numerus eſt $k-1$, ſint non notatae, quarum numerus cum ſit $s-n$, ſi inde tantum $k-1$ chartae extrahantur, numerus omnium varietatum erit $= [\frac{s-n}{k-1}]$. Quare ſi his ſingulis caſibus vnam chartam notatam adiungamus, id quod n variis modis fieri poteſt, numerus omnium horum caſuum erit

$$= n\,[\tfrac{s-n}{k-1}] = [\tfrac{n}{1}] \cdot [\tfrac{s-n}{k-1}].$$

§. 49. Inueſtigemus ſimili modo omnes caſus, quibus duae chartae notatae inter k extractas reperientur; reliquae ergo harum chartarum, quarum numerus eſt $= k-2$, debent eſſe non notatae, ideoque ex numero chartarum $s-n$ deſumtae, vnde numerus omnium varietatum erit $= [\frac{s-n}{k-2}]$; quibus ergo ſingulis inſuper duas chartas notatas adiungi oportebit, id quod caſibus $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = [\frac{n}{2}]$ fieri poteſt; vnde numerus omnium caſuum, quibus duae tantum chartae notatae inter extractas reperientur, erit $[\frac{n}{2}] \cdot [\frac{s-n}{k-2}]$. Eodem modo facile patebit, vt tantum tres chartae notatae inter extractas occurrant, numerum omnium caſuum poſſibilium fore $[\frac{n}{3}] \cdot [\frac{s-n}{k-3}]$. Porro igitur vt quatuor chartae notatae inter extractas reperiantur, numerus omnium varietatum poſſibilium erit

$$= [\tfrac{n}{4}] \cdot [\tfrac{s-n}{k-4}].$$

§. 50. Hinc igitur in genere concludimus, vt λ chartae notatae inter extractas inueniantur, numerum omnium varietatum poſſibilium fore $= [\frac{n}{\lambda}] \cdot [\frac{s-n}{k-\lambda}]$, qui numerus

merus duplici modo ad nihilum redigetur, primo scilicet, vti initio obseruauimus, si fuerit $\lambda > n$, tum vero etiam si fuerit $\lambda > k$; binis nimirum his casibus talis extractio, qualis desideratur, locum plane habere nequit. Quare si numerus chartarum notatarum n non fuerit maior quam numerus extractarum k, numerus omnium casuum possibilium, quibus omnes n chartae inter extractas occurrent, vbi $\lambda = n$, erit

$$\left[\frac{n}{n}\right] \cdot \left[\frac{s-n}{k-n}\right] = \left[\frac{s-n}{k-n}\right], \text{ ob } \left[\frac{n}{n}\right] = 1.$$

§. 51. Sin autem numerus chartarum notatarum n maior fuerit quam extractarum k, vltimus casus erit is, quo omnes k chartae extractae simul erunt notatae, quamobrem hic sumi debet $\lambda = k$, et numerus omnium horum casuum possibilium erit

$$\left[\frac{n}{k}\right] \cdot \left[\frac{s-n}{0}\right] = \left[\frac{n}{k}\right], \text{ ob } \left[\frac{s-n}{0}\right] = 1.$$

§. 52. Quo omnes hos diuersos casus clarius ante oculos exponamus, subiungamus sequentem tabellam, cuius columna prior indicet, quot chartae notatae inter extractas occurrere debeant, posterior vero columna indicat numerum omnium casuum, quibus hoc euenire potest

Chartarum notatarum inter extractas occurrentium numerus	Numerus omnium casuum possibilium, quibus hoc euenire potest
0	$[\frac{s-n}{k}]$
1	$[\frac{n}{1}] \cdot [\frac{s-n}{k-1}]$
2	$[\frac{n}{2}] \cdot [\frac{s-n}{k-2}]$
3	$[\frac{n}{3}] \cdot [\frac{s-n}{k-3}]$
4	$[\frac{n}{4}] \cdot [\frac{s-n}{k-4}]$
5	$[\frac{n}{5}] \cdot [\frac{s-n}{k-5}]$
.	.
.	.
.	.
in genere λ	$[\frac{n}{\lambda}] \cdot [\frac{s-n}{k-\lambda}]$

quas formulas eo vsque continuari oportet, donec euanescant; atque hinc sponte fluit alia demonstratio theorematum supra allatorum, ac praecipuae theorematis generalis §. 32 allati, quam hic euoluamus.

Demonstratio.

theorematis generalis §. 32. allati.

§. 53. Quodsi numeros casuum in tabula superioris paragraphi assignatos eo vsque continuemus, donec evanescant, eosque omnes in vnam summam colligamus, prodibit numerus omnium plane casuum, quibus vel nulla chartarum notatarum inter extractas reperietur, vel vnica tantum, vel duae, vel tres, vel quatuor, etc. vsque

ad

ad finem; quae ergo ſumma aequalis eſſe debebit numero omnium varietatum, quae in k chartis extractis locum habere poſſunt, quem numerum vidimus eſſe $=[\frac{s}{k}]$; quocirca ſi ponamus:

$S=[\frac{n}{0}]\cdot[\frac{s-n}{k}]+[\frac{n}{1}]\cdot[\frac{s-n}{k-1}]+[\frac{n}{2}]\cdot[\frac{s-n}{k-2}]+[\frac{n}{3}]\cdot[\frac{s-n}{k-3}]+$ etc.

erit $S=[\frac{s}{k}]$.

§. 54. Haec quidem ſeries ab illa, quae in theoremate tractatur adhuc diſſidet, verum facile ad hanc formam reduci poteſt ope noſtri lemmatis I., quo erat $[\frac{p}{q}]=[\frac{p}{p-q}]$. Hac enim reductione facta ſeries ſuperior ſequentem induet formam:

$$S=[\tfrac{n}{0}]\ [\tfrac{s-n}{s-n-k}]+[\tfrac{n}{1}]\cdot[\tfrac{s-n}{s-n-k+1}]+[\tfrac{n}{2}]\cdot[\tfrac{s-n}{s-n-k+2}]$$
$$+[\tfrac{n}{3}]\cdot[\tfrac{s-n}{s-n-k+3}]+\text{ etc.}$$

quae ergo ſumma erit $S=[\frac{s}{k}]$, vel etiam $S=[\frac{s}{s-k}]$.

§. 55. Nunc vero ſeries in theoremate ſuperiori ſummata erat haec:

$S=[\frac{n}{0}]\cdot[\frac{p}{q}]+[\frac{n}{1}]\cdot[\frac{p}{q+1}]+[\frac{n}{2}]\cdot[\frac{p}{q+2}]+[\frac{n}{3}]\cdot[\frac{p}{q+3}]+$ etc.

ad quam formam ſeriem hic inuentam reuocabimus, ſi ſtatuamus $s-n=p$ et $s-n-k=q$, vnde litterae s et k ita determinantur, vt ſit $s=p+n$ et $k=p-q$; quocirca per ea, quae hic expoſuimus, ſumma ſeriei propoſitae erit $S=[\frac{p+n}{p-q}]$, vel etiam $S=[\frac{p+n}{q+n}]$, quam eandem ſummam huic ſeriei in theoremate ſuperiori aſſignauimus.

SOLV-

SOLVTIO
PROBLEMATIS GEOMETRICI
EX
DOCTRINA SPHAERICORVM

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

Ex eo tempore quo *Theodosii* Elementa Sphaericorum confignata habentur, vix alia quae ad doctrinam de figuris in superficie Sphaerae descriptis vlterius perficiendam pertinent, a Geometris tractata reperiuntur, ac ea quae in Elementis Trigonometriae Sphaericae tractari solent atque ad resolutionem triangulorum Sphaericorum spectant. Nullum autem est dubium, quin si symptomata linearum curvarum in superficie sphaerica descriptarum, eodem modo euoluerentur, ac curuarum in plano descriptarum affectiones explicatae fuerunt; noua Geometriae pars prodiret, quae non solum insigni varietate, sed elegantia quoque inuentorum se commendaret. Verum tamen quum huiusmodi disquisitiones curiosae magis, quam vtiles videri que-

queant, inde fine dubio factum eſt, quod huic doctrinae perficiendae operam hucusque non dederint Geometrae. Quamuis autem completa Theoria curuarum in ſuperficiae ſphaerica, difficilis non minus ac parum fructuoſa eſſe poterit; eo tamen non obſtante ſingularia ex hac doctrina Problemata, quae praecipua quadam elegantia ſe commendant, non prorſus negligi debere videntur. Ex eo genere quum iſtud Problema ſit, cuius nunc ſolutionem exponere conſtitui, eandem Geometris non prorſus ingratam fore, mihi perſuaſi.

§. 2. Ex Elementis Geometriae notum eſt, quod Triangula in plano deſcripta, quae ſuper eadem baſi et ad eandem partem huius baſis collocantur, ſi aequalia inter ſe fuerint, hanc habeant proprietatem, vt eorum vertices collocentur in linea recte baſi parallela; occaſione igitur huius propoſitionis in animum induxi, vt inquirerem, de linea curua in qua collocentur vertices omnium triangulorum Sphaericorum, quae ſuper eadem baſi collocantur et quorum areae inter ſe ſunt aequales; quum enim levi adhibita attentione perſpexiſſem, hanc curuam nequaquam eſſe circulum maximum, cuius ſymptomata in ſuperficie ſphaerae, alioquin cum illis, quae lineae rectae in plano competunt, conſentire ſolent, eo magis curioſa haec disquiſitio mihi viſa eſt.

§. 3. Priusquam vero ſolutionem huius Problematis adgredi licet, propoſitiones quasdam praeliminares Lemmatum inſtar, praemittere conueniet, quum illis ſolutio noſtra ſuperſtruatur. Primum igitur noſſe oportet, quod ad aequalitatem binorum triangulorum Sphaericorum id requiratur, vt ſumma angulorum in vno iſtorum triangu-

lorum, aequalis ſit ſummae angulorum in altero; demonſtratum enim eſt quadruplam aream trianguli Sphaerici eſſe in ea ratione ad totam Sphaerae ſuperficiem, ac exceſſus ſummae omnium angulorum trianguli Sphaerici ſuper binos rectos, eſt ad binos angulos rectos. Alterum Lemma quod heic tanquam propoſitionem praeliminarem adhibere conſtitui, ſequenti continetur Theoremate:

Tab. IV. Fig. 1. *Si fuerit triangulum Sphaericum* A B V, *cuius tres anguli* A B V, B A V, A V B, *litteris* B, A, V *reſpective exprimantur, lateribus illis oppoſitis per*, b, a, v *deſignatis*, *erit*

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}V\,\frac{\text{cof.}\tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{cof.}\tfrac{1}{2}(b+a)}.$$

Huius propoſitionis variae quidem demonſtrationes ab Auctoribus, qui de doctrina triangulorum Sphaericorum agunt, tradi ſolent; quum tamen minus commodae mihi viſae ſint, hic aliam meo quidem iudicio, haud inconcinnam, exponam. Ex puncto V in baſin A B, demittatur normalis arcus circuli maximi V R et dicatur angulus A V R $= \mu$, atque B V R $= \nu$. Quum igitur ſit per proprietates triangulorum Sphaericorum rectangulorum:

$$\text{cof. A} = \text{ſin. A V R cof. V R et}$$
$$\text{cof. B} = \text{ſin. B V R cof. V R, fiet}$$
$$\text{cof. A} : \text{cof. B} = \text{ſin. } \mu : \text{ſin. } \nu,$$

hinc que

$$\text{cof. A} - \text{cof. B} : \text{cof. A} + \text{cof. B} = \text{ſin. } \mu - \text{ſin. } \nu : \text{ſin. } \mu + \text{ſin. } \nu, \text{ ſeu}$$
$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\mu-\nu)\,\text{cot.}\tfrac{1}{2}(\mu+\nu) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}V\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\mu-\nu).$$

Porro

Porro ob

tang. V R = tang. V A cof. AV R = tang. V B cof. B V R,

fit cof. μ : cof. ν = tang. a : tang. b, vnde colligitur

cof. ν − cof. μ : cof. μ + cof. ν = tang. b − tang. a : tang. b + tang. a, seu

tang. $\frac{1}{2}(\mu - \nu)$ tang. $\frac{1}{2}$ V = $\frac{\text{fin.}(b-a)}{\text{fin.}(b+a)}$.

Denique ob fin. A : fin. B = fin. a : fin. b, fit

fin. B − fin. A : fin. B + fin. A = fin. b − fin. a : fin. b + fin. a,

hincque

cot. $\frac{1}{2}$(B − A) tang. $\frac{1}{2}$(A + B) = cot. $\frac{1}{2}$($b-a$) tang $\frac{1}{2}$($b+a$).

Si nunc haec aequatio ducatur in

tang. $\frac{1}{2}$(B − A) tang. $\frac{1}{2}$(B + A) = cot. $\frac{1}{2}$ V tang. V $\frac{1}{2}$($\mu-\nu$),

obtinebimus:

tang.$^2\frac{1}{2}$(B+A) = cot.$^2\frac{1}{2}$ V. tang.$^2\frac{1}{2}$($\mu-\nu$) cot. $\frac{1}{2}$($b-a$) tang. $\frac{1}{2}$($b+a$),

in qua si loco tang. $\frac{1}{2}$($\mu - \nu$) substituatur

cot. $\frac{1}{2}$ V. $\frac{\text{fin.}(b-a)}{\text{fin.}(b+a)}$, fiet

$$\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}(B+A) = \text{cot.}^2\tfrac{1}{2}V \cdot \frac{\text{cot.}^2\frac{1}{2}(b-a)}{\text{cot.}^2\frac{1}{2}(b+a)} \cdot \frac{\text{fin.}(b-a)}{\text{fin.}(b+a)}$$

$$= \text{cot.}^2\tfrac{1}{2}V \frac{\text{cof.}^2\frac{1}{2}(b-a)^2}{\text{cof.}^2\frac{1}{2}(b+a)^2},$$

ob fin. $(b-a)$ = 2 fin. $\frac{1}{2}$($b-a$) cof. $\frac{1}{2}$($b-a$) et

fin. $(b+a)$ = 2 fin. $\frac{1}{2}$($b+a$) cof. $\frac{1}{2}$($b+a$).

Extracta igitur radice quadratica fit:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+A) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}V \frac{\text{cof.}\frac{1}{2}(b-a)}{\text{cof.}\frac{1}{2}(b+a)}.$$

§. 4. His praesuppositis solutio problematis nostri sequenti ratione adornari potest: Supponamus super data

basi $AB = 2CB = 2a$ descriptum esse triangulum Sphaericum AVB datae magnitudinis, tum vero ex puncto V in AB demittatur arcus circuli maximi VR normalis et dicantur $CR = x$; $VR = y$; anguli autem VAB, VBA, AVR, BVR, vti supra respective per litteras A, B, μ, ν exprimantur eritque per Lemma modo demonstratum:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+\mu) = \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(VR-AR)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(VR+AR)} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+\nu) = \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(VR-BR)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(VR+BR)},$$

ob $\text{tang.}\tfrac{1}{2}ARV = \text{tang. } 45 = 1$,

hinc colligitur

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+\mu) = \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y-a-x)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y+a+x)} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+\nu) = \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y-a+x)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y+a-x)}.$$

Hinc vero sequitur

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B+\mu+\nu) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B+V)$$
$$= \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y-a-x)\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y+a-x)+\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y-a+x)\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y+a+x)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y+a+x)\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y+a-x)-\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y-a-x)\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y-a+x)}.$$

Est vero

$$\text{cos.}(y+x)+\text{cos.}a = 2\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y+x+a)\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y+x-a);$$
$$\text{cos.}(y-x)+\text{cos.}a = 2\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y-x+a)\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y-x-a);$$

tumque

$$\text{cos.}(a+y)+\text{cos.}x = 2\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y+a+x)\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y+a-x);$$
$$\text{cos.}(y-a)+\text{cos.}x = 2\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y-a+x)\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(y-a-x);$$

quam-

quamobrem conſequemur:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B+V) = \frac{\text{cof.}(y+x)+\text{cof.}(y-x)+2\,\text{cof.}\,a}{\text{cof.}(a+y)-\text{cof.}(y-a)}.$$

Atqui eſt

$$\text{cof.}(y+x)+\text{cof.}(y-x) = 2\,\text{cof.}\,y\,\text{cof.}\,x \text{ et}$$
$$\text{cof.}(y-a)-\text{cof.}(a+y) = 2\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,y,$$

vnde his valoribus ſubſtitutis fiet

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B+V) = \frac{\text{cof.}\,y\,\text{cof.}\,x+\text{cof.}\,a}{-\text{ſin.}\,y\,\text{ſin.}\,a}.$$

Quum igitur triangulum A V B ſit datae magnitudinis, ſumma angulorum A, B, V erit cognita, quae ſi ſtatuatur $180^\circ + 2\delta$, fiet

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B+V) = \text{tang.}(90+\delta) = -\text{cot.}\,\delta,$$

vnde haec orietur aequatio:

$$\text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,y = \text{cof.}\,y\,\text{cof.}\,x+\text{cof.}\,a,$$

qua aequatione indoles curuae in qua punctum V collocatur, erit expreſſa.

§. 5. Quum ex hac aequatione indoles huius curvae nondum ſatis liquido pateſcat, videamus quomodo propius ad ſcopum pertingere licebit. Per punctum C ducatur circulus maximus Z C normalis ad A B et iungatur C V, tum vero dicatur C V = z et angulus Z C V = Φ, eritque ob

$$\text{cof. C R. cof. V R} = \text{cof. V C, et}$$
$$\text{ſin. V R} = \text{ſin. V C ſin. V C R} = \text{ſin. V C cof. Z C V,}$$
$$\text{cof.}\,x\,\text{cof.}\,y = \text{cof.}\,z \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\,y = \text{ſin.}\,z\,\text{cof.}\,\Phi,$$

his igitur valoribus in aequatione allata ſubſtitutis, fiet

$$\text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,z\,\text{cof.}\,\Phi = \text{cof.}\,z+\text{cof.}\,a,$$

quae iam facile ad huiusmodi formam reducitur:

$$\text{cos. } \gamma = \text{cos. } \varkappa \text{ cos. } \varepsilon + \text{sin. } \varkappa \text{ sin. } \varepsilon \text{ cos. } \Phi,$$

ponendo

$$\frac{\text{cos. } \gamma}{\text{cos. } \varepsilon} = -\text{cos. } a \text{ et } -\text{tang. } \varepsilon = \text{cot. } \delta \text{ sin. } a,$$

Tab. IV Fig. 2. ex qua aequatione manifesto liquet curuam istam quaesitam esse circulum minorem, cuius constructio hunc in modum adornatur: Concipiatur circulum maximum C Z productum iterum occurrere circulo maximo A B O in puncto M, tumque resecetur M O = C B, et ducatur P O, qui cum arcu M O facit angulum P O M = $90 - \delta$; iam si polo P interuallo arcu P O describatur circulus minor O V Q, erit hic circulus locus istorum punctorum V, ita sitorum, vt si ex datis punctis A, B ad punctum quodpiam V ducantur arcus circulorum maximorum A V, B V, erit triangulum B V A datae magnitudinis, summa angulorum existente $= 180 + 2\delta$. Nam ob

$$\text{P O M} = 90 - \delta, \text{ erit}$$

$$\text{tang. P O M} = \text{cot. } \delta = -\frac{\text{tang. } \varepsilon}{\text{sin. } a},$$

est vero

$$\text{tang. P O M} = \frac{\text{tang. P M}}{\text{sin. M O}},$$

eritque igitur

$$\text{tang. P M} = -\text{tang. } \varepsilon, \text{ et P M} = 180° - \varepsilon,$$

quare arcus C Z P $= \varepsilon$, tum vero fit

$$\text{cos. P O} = \text{cos. O M cos. P M},$$

ideoque

$$\text{cos. P O} = -\text{cos. } a \text{ cos. } \varepsilon, \text{ ob O M} = \text{C B} = a,$$

hinc obtinemus P O $= \gamma$; sponte autem liquet esse pro trian-

triangulo ſphaerico P C V;

$$\text{cof. P V} = \text{cof. P O} = \text{cof. P C cof. V C} + \text{ſin. P C ſin. V C cof. P C V},$$

hoc eſt

$$\text{cof. } \gamma = \text{cof. } \varepsilon \text{ cof. } \varkappa + \text{ſin. } \varepsilon \text{ ſin. } \varkappa \text{ cof. } \Phi,$$

quae eſt aequatio ſupra inuenta. Quia vti iam obſeruauimus, ſit arcus

$$\text{C P} = 180^\circ - \text{P M} = \varepsilon, \text{ ideoque}$$

$$\text{tang. C P} = \text{tang. } \varepsilon = -\text{cot. } \delta \text{ ſin. } a, \text{ erit}$$

$$\text{C Q} = \text{C P} - \text{P Q} = \text{C P} - \text{P O} = \varepsilon - \gamma \text{ et}$$

$$\text{C S} = \text{C P} + \text{P O} = \varepsilon + \gamma,$$

qua ratione bina puncta definiuntur, in quibus circulus minor Q V O circulo maximo C Z P occurrit.

§. 6. Data baſi A B, cuiuscunque fuerit magnitudinis triangulum A V B, circulus minor, qui locum punctorum V exhibet, ſemper per punctum O circuli C B M tranſibit, exiſtente M O = C B, hinc igitur patet circulum minorem iſtum, in maximum non abire, niſi fuerit M V = C B = 90°; pro eo autem caſu quicunque demum fuerit valor trianguli A V B, ſemper locus punctorum V erit circulus maximus et tunc quidem triangulum A V B in ſegmentum ſphaerae abit, binis ſemicirculis maximis incluſum. Si vero fuerit C B < 90°, circulus minor in maximum abire non poteſt niſi euaneſcente triangulo A V B, quod per ſe eſt manifeſtum.

§. 7. Si conſideretur punctum Q, vbi circulus minor O V Q interſecat circulum maximum C Z M, eius ſitus

situs triplici modo se habere poterit; dum enim Z supponitur esse polus circuli maximi C B M, punctum Q aut cadet inter Z et C, aut in ipsum punctum Z incidet, aut denique inter Z et M reperietur. Primus casus locum habebit, si fuerit cot. $\delta >$ cot. a, secundus si sit cot. $\delta =$ cot. a, et tertius denique existente cot. $\delta <$ cot. a. Nam si sit cot. $\delta >$ cot. a et tang. P M indicetur per tang. θ, fiet ob $\frac{\text{tang. }\theta}{\text{sin. }a} =$ cot. δ, $\frac{\text{tang. }\theta}{\text{sin. }a} >$ cot. a, ideoque tang. $\theta >$ cos. a, vnde multiplicando vtrinque per cos. θ, sin. $\theta >$ cos. a cos. θ, id est sin. $\theta >$ cos. γ, hincque vicissim sin. $\gamma >$ cos. θ, quum igitur sit P M $= \theta$, erit P Z $= 90° - \theta$, ideoque P Q $>$ P Z, hoc est punctum Q cadet inter Z et C; simili ratione liquet posito cot. $\delta =$ cot. a, fore sin. $\gamma =$ cos. $\theta =$ sin $(90 - \theta)$, id est P Q $=$ P Z vnde puncta Q et Z coincident; tumque denuo posito cot. $\delta <$ cot. a, fiet sin. $\gamma <$ cos. θ, ideoque P Z $>$ P Q.

§. 8. Si punctum V incidat in O, abit arcus B V in B O, quamobrem ob A B + B O $= 180°$, erit quoque arcus A O aequalis semicirculo maximo, ideoque hoc casu triangulum A V B abit in segmentum sphaerae, binis semicirculis maximis inclusum, angulo inter hos semicirculos X O B, vel X A B existente $= \delta$; est enim

$$\tfrac{1}{2}(\text{X A B} + \text{A B O} + \text{X O B}) = 90° + \text{X O B}, \text{ ob}$$

$$\text{A B O} = 180° \text{ et X A B} = \text{X O B},$$

hincque fiet

$$90° + \text{X O B} = 90° + \delta \text{ siue}$$

$$\text{X O B} = \delta = 90° - \text{P O M},$$

vnde perspicuum euadit arcum circuli maximi O X A, tangere circulum minorem O V Q in puncto O.

§. 9.

§. 9. Quoniam locus punctorum V eſt circulus minor polo P intervallo P O deſcriptus, merito quaeritur vtrum integer hic circulus, problemati ſatisfaciat, an vero ea tantum eius pars, quae ſuper circulum maximum A B M eleuata eſt. Scilicet ſi integer hic ſemicirculus minor deſcriptus concipiatur, qui occurrat circulo maximo C Z M in punctis Q et S, eius pars Q V O ſupra circulum maximum eleuatur, reliqua parte O S infra hunc circulum depreſſa. Tenendum vero eſt partem Q O proprie tantum Problemati ſatisfacere, alteram autem partem, O S eius eſſe indolis, vt vbicunque in illa ſumatur punctum V', quod cum punctis A, B iungatur arcubus circulorum maximorum A V', B V', triangulum A V' B quoque datae ſit magnitudinis, aequale nimirum exceſſui, quo ſemiſſis ſuperficiei ſphaerae exſuperat aream trianguli A V B, ita vt ambo haec triangula A V B, A V' B inuicem addita aequentur ſemiſſi ſuperficiei ſphaericae. Nam ſi indicentur anguli V' A B, V' B A, A V' B reſpectiue per litteras A', B', V', tumque ponatur

$$A' + B' + V' = 180^\circ + 2\delta',$$

ita vt ſit

$$\tfrac{1}{2}(A' + B' + V') = 90^\circ + \delta',$$

deinde vero ſtatuatur $Z C V' = \Phi'$ et arcus $C V' = z$, peruenietur ad hanc aequationem:

$$-\cot.\delta' \sin.a \sin.z \cos.\Phi = \cos.z + \cos.a,$$

cuius reductio ad formam

$$\cos.\gamma = \cos.z \cos.\varepsilon + \sin.z \sin.\varepsilon \cos.\Phi',$$

requirit, vt ponatur

$$\cos.\gamma = -\cos.a \cos.\varepsilon \text{ et } \tang.\varepsilon = \cot.\delta' \sin.a,$$

si igitur sumatur $\delta' = 180° - \delta$, pro ε et γ iidem valores reperientur ac supra §. 5, quare arcus O S erit locus punctorum V', existente area trianguli A B V' eius quantitatis, vt fit

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(A' + B' + V') = \text{tang.}(90° + \delta').$$

Si vero fuerit

$$A' + B' + V' = 180° + 2\delta',$$

quum supra assumserimus

$$A + B + V = 180° + 2\delta,$$

addendo inuicem habebimus

$$A + B + V + A' + B' + V' = 360° + 2\delta + 2\delta'$$
$$= 2.360, \text{ ob } \delta' = 180° - \delta.$$

Hinc per §. 3. si superficies sphaerae indicetur per S et areae triangulorum A V B, A V' B per α, β fiet

$$4\alpha : S = A + B + V - 180° : 180° \text{ tumque}$$
$$4\beta : S = A' + B' + V' - 180° : 180° \text{ vnde}$$
$$4\alpha + 4\beta : S = A + B + V + A' + B' + V' - 360° : 180,$$

id est

$$4(\alpha + \beta) : S = 2 : 1, \text{ hinc } \alpha + \beta = \tfrac{1}{4} S.$$

In nostra figura triangulum A V' B non quidem expressimus, verum eo tamen non obstante, quae de hoc Triangulo monuimus, satis perspicua esse existimamus.

§. 10. Quum solutio Problematis nostri in superioribus allata Analytica sit, nunc aliam eius solutionem Geometricam eo magis adferre licebit, quod vix quidem primo intuitu iudicari possit, hoc Problema per Elementa Sphaericorum tam expedite demonstrari posse. *Problema* au-

autem ipſum iam ita enunciatur: *Quaeritur in ſuperficie ſphaerae linea curua* Q V O *eius indolis, vt vbicunque in illa ſumatur punctum* V, *quod cum datis linis punctis* A, B *iungatur arcubus circulorum maximorum* A V, B V, *triangulum* A V B *ſemper datae ſit magnitudinis, aequale nimirum ſegmento ſphaerae* A X O B A, *binis ſemicirculis maximis* A X O, A B O, *incluſo.*

Conſtructio.

Arcu A B in C biſecto deſcribatur per C circulus maximus C Z M normalis ad A B qui circulo A B O denuo in M occurrat, tum vero per O ducatur arcus circuli maximi P O normalis ad A X O, qui circulo C Z M occurrat in P, iam Polo P interuallo P O deſcribatur circulus minor Q V O, dico hunc circulum minorem eſſe curuam iſtam quaeſitam.

Demonſtratio.

Sumatur punctum V vbicunque in hoc circulo minore, modo in arcu O V Q ſupra C O M eleuato reperiatur, et ducantur ſemicirculi maximi A V O, B V N, tumque arcus circulorum maximorum P V, P N. Iam ob arcum B O N = C B M = A C O, fiet C B = M O = M N, ideoque P N = P O = P V, hinc in triangulo P V N aequicruro, erit ang. P V N = P N V et in Δ P V O aequicruro, ang. P V O = P O V. Nunc vero ob ang. P O N = P N O = P N V + V N O, et V N O = V B O, fiet

ang. P O N = 180° − P O B = P V N + V B O,

ideoque

$$180°-VOB-POV=180°-VOB-PVO$$
$$=PVN+VBO,$$

addatur vtrinque angulus B V O, eritque

$$180°+BVO-VOB-PVO=BVO+VBO+PVN,$$

vnde ob

$$PVN=PVO-VNO=PVO-AVB,$$ fiet:

$$180°+BVO-VOB-PVO=BVO$$
$$+VBO+PVO-AVB,$$ vnde
$$360°-2POV=BVO+VBO+BOV,$$

quum igitur fit angulus

$$VOX=90°-POV,$$ erit $180°-2POV=2VOX,$

hincque

$$180°+2VOX=BVO+VBO+BOV,$$

ex quo iam conſtat triangulum ſphaericum B V O aequari ſegmento ſphaerae A V O X A, hincque demto vtrinque triangulo communi V O X, fiet triangulum $AVX=BOX$ et addito denuo vtrinque triangulo A X B fiet ſegmentum $AXOBA=\Delta AVB.$

§. 11. Si in ſuperficie ſphaerae tria ſumantur puncta A, B, V patet ſemper bina quaecunque eorum, duobus arcubus circulorum maximorum iungi poſſe, vno ſcilicet arcu ſemicirculo minori, altero tantundem maiore exiſtente; hincque ſi per triangulum ſphaericum, intelligatur figura, quae includitur tribus arcubus circulorum maximorum, patet iungendo tria puncta A, B, V omnino octo for-

formari poſſe triangula ſphaerica. Scilicet ſi bini arcus AB et $360° - AB$ indicentur per v, v', ſimiliterque bini arcus AV, $360° - AV$ per b, b' et BV, $360° - BV$ per a, a', octo haec triangula orientur per combinationes diuerſas trium a vel a', b vel b', v vel v'. Quamuis autem in Geometria Elementari, non conſiderari ſoleant, niſi triangula quae componuntur ex arcubus circulorum maximorum, ſemicirculo minorum, nullum tamen eſt dubium, quin triangulorum ſphaericorum affectiones rite explicatae ad reliqua quoque adplicari queant. Pro caſu noſtri Problematis vbi arcus AB ſupponitur cognitus, quatuor triangula formari poſſunt, *primum* ſcilicet quod in Figura indicatur AVB. *ſecundum* quod arcubus AB, BV et $360° - AV$ includitur, *tertium* quod arcubus AB, AV et $360° - BV$ includitur et *quartum* denique cuius latera ſunt AB, $360° - AV$, $360° - BV$. Quod ſecundum et tertium attinet, facile liquet, eorum areas complementa conſtituere trianguli AVB ad ſemiſſim ſuperficiei ſphaerae. Pro quarto vero obſeruare conuenit, arcus AV, BV antequam ad A, B peruenerint, ſe in V' interſecare, vbi igitur area trianguli cenſeri debet aequalis differentiae inter ſegmentum ſphaericum $VUV'TV$ et triangulum $AV'B = \Delta AVB$ Fig. 2. Deinde vero ſi loco baſis AB adhibeatur eius complementum ad quatuor rectos, alia quatuor orientur triangula, ad quae Problema noſtrum quoque adplicari poteſt. Tab. IV. Fig. 3.

§. 12. Ponamus circulum maximum CZM deſignare Meridianum cuiusdam loci et CBM horizontem, in quo C ſit punctum Meridiei et M Septentrionis, iam ſi

Polus aequatoris intelligatur esse P et distantia stellae alicuius fixae a Polo aequatoris P O, ita vt haec stella motu diurno circulum minorem Q V O S describere videatur, qui horizontem in puncto O intersecat, tumque a Meridie vtrinque capiantur A C, C B singuli aequales ipsi M O, vbicunque haec stella versatur, si ex punctis horizontis A, B ad eius locum ducantur arcus circulorum maximorum, A V, B V, erit triangulum sphaericum A V B, quod inde formatur, datae magnitudinis.

DIS-

DISQVISITIO ANALYTICO-GEOMETRICA DE VARIIS SPECIEBVS LINEARVM CVRVARVM SINGVLARI PROPRIETATE PRAEDITARVM.

Auctore

NICOLAO FVSS.

§. 1.

In dissertatione quam non ita pridem Academiae tradidi, in naturam curuae inquisiueram circa punctum aliquod fixum C descriptae, rectamque A T, in A C normalem, tangentis in puncto A, quae scilicet curua hac gaudere debebat proprietate: vt, ducta ex puncto C per eius punctum quodlibet Y recta C Y T, arcus A Y tangenti A T aequetur. Hic quaestionem sequentem generaliorem tractare animus est: Tab. II. Fig. 2.

Data positione recta E F, *datoque puncto fixo* C, *inuenire curuam* a b, *cuius arcus* m n, *intra angulum* M C N *contenti, aequales sint interuallo* M N, *ab eodem angulo in recta* E F *abscisso.* Fig. 3.

§. 2.

§. 2. In hac quaestione Problema illud specialius, cuius Solutio me ad speciem Lemniscatae perduxerat, comprehenditur, id quod infra clarius ostendemus. Facile autem intelligitur, non vnicam tantum, sed infinitas dari curuas Problemati generali hic proposito satisfacientes, quoniam per quoduis rectae C M punctum m curua traduci potest ita comparata, vt portio eius mn aequetur portioni rectae E F intra eundem angulum M C N inclusae. Hae quidem curuae vtique diuersimode ad rectam C M inclinabuntur; earum autem directio pro quolibet puncto m, siue angulus M mb, sequenti modo facile inuestigari potest.

§. 3. Rectae C M ducatur proxima C μ, ponaturque normalis C A $= 1$ et interuallum datum C $m = m$; tum vero sit angulus A C M $= \zeta$ et directio curuae M $mb = \omega$, positoque arcu $m\nu = s$ erit etiam interuallum M $\mu = s$. Iam ex punctis M et m demittantur in rectam C μ perpendicula M r et mr, et ob angulum

$$M\mu R = AMC = 90^\circ - \zeta \text{ erit } MR = s \cos.\zeta.$$

Ex triangulis autem C M R et C mr deducitur

$$CM : MR = Cm : mr.$$

Est vero C $m = m$,

$$CM = \sec. ACM = \frac{1}{\cos.\zeta} \text{ et } mr = m\nu \sin. m\nu r = s \sin. \omega,$$

quibus substitutis analogia fiet

$$\frac{1}{\cos.\zeta} : s \cos.\zeta = m : s \sin. \omega,$$

vnde prodit $\sin. \omega = m \cos.\zeta^2$. Quoties igitur fuerit

$$m \cos.\zeta^2 < 1, \text{ hoc est } \cos.\zeta < \frac{1}{\sqrt{m}},$$

directio curuae per m transeuntis reuera assignari potest, idque

idque duplici modo, quia etiam directio $m\nu'$ satisfacit, si modo fuerit angulus $C m \nu' = M m \nu$. Sin autem secus eueniat vt $\cos. \zeta > \frac{1}{\sqrt{m}}$, directio curuae ideoque et ipsa curua fiet imaginaria.

§. 4. Quod si autem ipsa directio ω vt data spectetur, assignari poterit punctum m, vbi curua Problemati satisfaciens rectam C M intersecat: Erit enim eius distantia a puncto C, hoc est $C m = m = \frac{\sin. \omega}{\cos. \zeta^2}$. Hinc intelligitur, euenire posse vt punctum m in ipsam rectam E F incidat in M, quod fit quando $m = C M$, hoc est si fuerit $\frac{\sin. \omega}{\cos. \zeta^2} = \frac{1}{\cos. \zeta}$, siue $\sin. \omega = \cos. \zeta$, ideoque $\omega = 90^\circ - \zeta$; vbi iterum duplex positio locum habet: altera qua curuae elementum $m\nu$ congruit cum interuallo $M\mu$; altera qua reclinatur sub eodem angulo $90^\circ - \zeta$. Quin etiam fieri potest vt curua vltra rectam E F porrigatur, quod euenit casu $m > C M$, hoc est $\frac{\sin. \omega}{\cos. \zeta^2} > \frac{1}{\cos. \zeta}$, siue $\sin. \omega > \cos. \zeta$. Curua igitur eo longius vltra rectam E F discedere poterit, quo maior fuerit angulus $A C M = \zeta$.

§. 5. Cum igitur innumerabiles dentur lineae curuae huic Problemati satisfacientes, quarum in praecedente dissertatione vnicam tantum sum perscrutatus, quae scilicet rectam E F in A tangebat; operae vtique pretium videtur, etiam in solutionem generalem inquirere. Quo autem haec inuestigatio facilius suscipi queat, omnes curuas satisfacientes per punctum fixum C transire assumam, id quod eo tutius statui potest, quod ipse calculus, si aliter eueniat, id ostensurus erit, dum hunc transitum imaginarium

reddet. Hoc igitur modo omnes curuae quas quaerimus in hoc tantum a se inuicem discrepabunt, quod in puncto C diuersimode ad axem C A inclinentur.

Tab. II. Fig. 4. §. 6. Ipsam nunc quaestionem propius aggredientes consideremus curuam C M, axi A C occurrentem in puncto C, vbi tangatur a recta C G ad axem inclinata sub angulo $A C G = \alpha$. Sit Y punctum in hac curua, per quod si ducatur recta C Y T, rectae E F occurrens in T, debet esse arcus C Y interuallo G T aequalis, ita vt, posito hoc arcu $C Y = s$, ob

$$A G = \text{tang. } \alpha, \text{ fit } A T = \text{tang. } \alpha + s.$$

Iam ex puncto Y demittatur perpendiculum Y X, vocenturque coordinatae

$$C X = x \text{ et } X Y = y, \text{ erit}$$

$$C X : X Y = C A : A T, \text{ hoc est}$$

$$x : y = 1 : (\text{tang. } \alpha + s)$$

vnde prodit haec aequatio:

$$y = x \text{ tang. } \alpha + s x,$$

quae iam conditionem Problematis complectitur.

§. 7. Ducatur nunc recta Y V, curuam tangens in puncto Y, voceturque angulus $A V Y = \Phi$. Tum vero consideretur punctum curuae proximum y, ex quo si agatur normalis in axem $y x$, ducta lineola $Y u$ axi parallela, erit etiam angulus $u Y y = \Phi$, ideoque

$$Y u = d x = d s \text{ cos. } \Phi \text{ et } y u = d y = d s \text{ sin. } \Phi.$$

His inuentis differentietur aequatio supra inuenta

$$y = x \text{ tang. } \alpha + s x,$$

pro-

prodibitque ista:

$$dy = dx \text{ tang. } \alpha + s\,dx + x\,ds,$$ siue

$$ds \text{ sin. } \Phi = ds \text{ tang. } \alpha \text{ cos. } \Phi + s\,ds \text{ cos. } \Phi + x\,ds,$$

vnde fit

$$x = \text{sin. } \Phi - \text{tang. } \alpha \text{ cos. } \Phi - s \text{ cos. } \Phi,$$

hocque inuento:

$$y = x \text{ tang } \alpha + s\,x.$$

Vbi iam euidens est, in ipso curuae initio, vbi $\Phi = \alpha$ et $s = 0$, tam absciſſam quam applicatam euanescere, vti requiritur.

§. 8. Quo nunc relationem inter binas variabiles s et Φ, quibus binae coordinatae determinantur, inuestigare queamus, repraesentemus aequationem pro x inuentam hoc modo:

$$x = \frac{\text{sin. } (\Phi - \alpha)}{\text{cos. } \alpha} - s \text{ cos. } \Phi,$$

eamque differentiemus, fiet

$$dx = ds \text{ cos. } \Phi = \frac{d\Phi \text{ cos. } (\Phi - \alpha)}{\text{cos. } \alpha} - ds \text{ cos. } \Phi + s\,d\Phi \text{ sin. } \Phi,$$

siue

$$2ds \text{ cos. } \Phi - s\,d\Phi \text{ sin. } \Phi = \frac{d\Phi \text{ cos. } (\Phi - \alpha)}{\text{cos. } \alpha}.$$

Hanc aequationem, ductam in Φ, functionem anguli Φ, integrabilem statuamus, et cum sit facta multiplicatione

$$2\Phi\,ds \text{ cos. } \Phi - s\,\Phi\,d\Phi \text{ sin. } \Phi = \frac{\Phi\,d\Phi \text{ cos. } (\Phi - \alpha)}{\text{cos. } \alpha},$$

statuatur

$$2\Phi\,s \text{ cos. } \Phi = \int \frac{\Phi\,d\Phi \text{ cos. } (\Phi - \alpha)}{\text{cos. } \alpha},$$

cuius differentiale est

$$2\Phi ds \text{ cos. } \Phi + 2s\,d\Phi \text{ cos. } \Phi - 2\Phi s\,d\Phi \text{ sin. } \Phi = \frac{\Phi\,d\Phi \text{ cos. } (\Phi - \alpha)}{\text{cos. } \alpha},$$

ita vt membris finiſtris inter ſe aequatis ſit

$$2\,s\,d\Phi \cos.\Phi = \Phi\, s\, d\Phi \sin.\Phi, \text{ hinc}$$

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{d\Phi \sin.\Phi}{2\cos.\Phi}, \text{ vnde ſit}$$

$$l\Phi = -\tfrac{1}{2} l \cos.\Phi, \text{ conſequenter}$$

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\cos.\Phi}}, \text{ vnde aequatio integrata fiet}$$

$$2\,s\sqrt{\cos.\Phi} = \frac{1}{\cos.\alpha} \int \frac{d\Phi \cos.(\Phi-\alpha)}{\sqrt{\cos.\Phi}},$$

quod integrale ita eſt capiendum, vt euaneſcat poſito $\Phi = \alpha$.

§. 9. Cum autem euoluendo conſtet eſſe

$$\cos.(\Phi-\alpha) = \cos.\alpha \cos.\Phi + \sin.\alpha \sin.\Phi, \text{ erit}$$

$$\int \frac{d\Phi \cos.(\Phi-\alpha)}{\sqrt{\cos.\Phi}} = \cos.\alpha \int d\Phi \sqrt{\cos.\Phi} + \sin.\alpha \int \frac{d\Phi \sin.\Phi}{\sqrt{\cos.\Phi}},$$

ergo

$$2\,s\sqrt{\cos.\Phi} = \text{tang.}\,\alpha \int \frac{d\Phi \sin.\Phi}{\sqrt{\cos.\Phi}} + \int d\Phi \sqrt{\cos.\Phi}.$$

Prioris autem membri integrale manifeſto eſt $-2\sqrt{\cos.\Phi}$, quod, ita ſumtum vt euaneſcat poſito $\Phi = \alpha$, dat

$$\int \frac{d\Phi \sin.\Phi}{\sqrt{\cos.\Phi}} = 2\,(\sqrt{\cos.\alpha} - \sqrt{\cos.\Phi}).$$

Pro altero membro ſtatuatur $\cos.\Phi = v\,v$, ita vt

$$\sin.\Phi = \sqrt{(1-v^4)} \text{ et } d\Phi \sin.\Phi = -2\,v\,dv,$$

ideoque

$$d\Phi = -\frac{2\,v\,dv}{\sqrt{(1-v^4)}} \text{ et } \int d\Phi \sqrt{\cos.\Phi} = -2\int \frac{v\,v\,dv}{\sqrt{(1-v^4)}}.$$

Eſt vero per ſeriem infinitam integrando

$$\int \frac{v\,v\,dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = v^3\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2.7} v^4 + \frac{1.3}{2.4.11} v^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} v^{12} + \text{etc.}\right)$$

vnde, reſtituto valore $v\,v = \cos.\Phi$, habebimus:

$$\int d\Phi \sqrt{\cos.\Phi} = -2\cos.\Phi^{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2.7}\cos.\Phi^2 + \frac{1.3}{2.4.11}\cos.\Phi^4 + \text{etc.}\right)$$

Quod ſi igitur integrale hoc, ita ſumtum vt euaneſcat poſito $\Phi = \alpha$, indicemus per $\Gamma : \alpha - \Gamma : \Phi$, erit

$$2s\sqrt{\text{cos.}\,\Phi} = 2\,\text{tang.}\,\alpha\,(\sqrt{\text{cos.}\,\alpha} - \sqrt{\text{cos.}\,\Phi}) + \Gamma : \alpha - \Gamma : \Phi,$$

exiſtentibus his functionibus angulorum α et Φ

$$\Gamma : \Phi = 2\,\text{cos.}\,\Phi^{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2.7}\,\text{cos.}\,\Phi^{2} + \tfrac{1.3}{2.4.11}\,\text{cos.}\,\Phi^{4} + \text{etc.}\right)$$

$$\Gamma : \alpha = 2\,\text{cos.}\,\alpha^{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2.7}\,\text{cos.}\,\alpha^{2} + \tfrac{1.3}{2.4.11}\,\text{cos.}\,\alpha^{4} + \text{etc.}\right).$$

§. 10. Hic quidem facile patet, ſi ponatur vel $\alpha = 0$ vel $\Phi = 0$, fore $\Gamma : 0 = 1,1980$; nam in praecedente diſſertatione inuenimus eſſe

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2.7} + \tfrac{1.5}{2.4.11} + \tfrac{1.3.5}{2.4.6.15} + \text{etc.} = 0,5990.$$

Neque etiam caſus, quo vel α vel Φ angulo recto aequalis, vlla difficultate laborat, quoniam manifeſto fit $\Gamma : \frac{\pi}{2} = 0$. Verum ſi ſtatuatur $\Phi = -90°$, expreſſio ſupra data praeberet $\Gamma : (-\frac{\pi}{2}) = 0$, quod autem veritati conſentaneum non eſt. Ad hanc difficultatem tollendam ſuper axe $ab = 180° = \pi$, conſtruatur curua $a\,q\,d\,b$ ita comparata, vt eius abſciſſae Tab II.
$cp = \Phi$ reſpondeat applicata $pq = \sqrt{\text{cos.}\,\Phi}$, critque area Fig. 5.

$$cpqd = \int d\Phi \sqrt{\text{cos.}\,\Phi} = \Gamma : \Phi.$$

At ex priori diſſertatione, vbi abſciſſas areasque correſpondentes a puncto a ſumſimus, conſtat eſſe aream

$$acd = 1,1980;$$

hinc ſumto $\Phi = -90° = cb$, abſciſſae ab manifeſto reſpondet area $acbda = 2,3960$, ideoque habebimus:

$$\Gamma : (-\tfrac{\pi}{2}) = 2,3960.$$

§. 11. Quod ſi iam breuitatis gratia ponatur

$$2s\sqrt{\text{cos.}\,\Phi} = 2\,\text{tang.}\,\alpha\,(\sqrt{\text{cos.}\,\alpha} - \sqrt{\text{cos.}\,\Phi}) + \Gamma : \alpha - \Gamma : \Phi = V,$$

erit arcus $CY = s = \frac{V}{2\sqrt{\text{cof. }\Phi}}$, et coordinatae erunt

$$CX = x = \text{fin. }\Phi - \text{cof. }\Phi\,(\text{tang. }\alpha + s);$$

$$XY = y = x\,(\text{tang. }\alpha + s),$$

et nunc manifeſtum eſt, quod iam ſupra obſeruauimus, poſito $\Phi = \alpha$ fore $s = 0$, $x = 0$ et $y = 0$, id quod euenit in ipſo puncto C. Quo magis autem angulus Φ vltra hunc terminum $\Phi = \alpha$ increſcit, eo magis etiam binae coordinatae x et y, cum arcu s increſcunt. Ita poſito $\Phi = 90°$ erit

Tab. II. Fig. 5.

$$V = 2 \text{ tang. } \alpha \sqrt{\text{cof. } \alpha} + \Gamma : \alpha,$$

ideoque $s = \infty$; tum vero ob

$$s \text{ cof. } \Phi = \tfrac{1}{2} V \sqrt{\text{cof. } \Phi} = 0,$$

erit $x = 1$ et $y = \infty$. Cum igitur abſciſſae $CA = 1$ reſpondeat applicata infinita, euidens eſt, curuam noſtram ex diſtantia infinita, vbi cum recta EF ſurſum producta confunditur, deſcendendo continuo magis ab hac recta, eius aſymptota, recedere et in puncto C ſub angulo $ACG = \alpha$ per axem tranſire.

§. 12. Quod ſi iam hunc curuae ramum aſymptoticum MC dextrorſum vlterius continuare velimus, producamus axem AC vsque in a, ita vt $Ca = CA = 1$, et per a rectae datae EF parallela agatur ef; tum, producta tangente GC in g vsque, erit angulus $aCg = \alpha$ et interuallum $ag = \text{tang. } \alpha$. Cum nunc, ſtatim atque curua per C tranſierit, tam arcus s quam eius inclinatio Φ reſpectu poſitionis tanquam negatiuae quantitates ſunt ſpectandae, abſciſſis

$$x = -\text{fin } \Phi - \text{cof. } \Phi\,(\text{tang. } \alpha - s),$$

reſpondent applicatae

$$y =$$

$$y = x(\text{tang. } \alpha - s) = -\text{ſin. } \Phi(\text{tang. } \alpha - s) - \text{coſ. } \Phi(\text{tang. } \alpha - s)^2,$$

quae negatiuae erunt quamdiu $s < \text{tang. } \alpha$; ſin autem fuerit $s = \text{tang. } \alpha$, erit $x = -\text{ſin. } \Phi$ et $y = 0$. Vnde patet, curuam ex parte axis inferiore aſcendendo iterum per eum tranſire in puncto S, exiſtente interuallo $CS = \text{ſin. } \Phi$. Dehinc vero curua continuo aſcendendo ad rectam ef accedet, donec ad diſtantiam infinitam cum hac recta ſurſum producta conueniat. Cum enim, ob

$$\Gamma : (-\tfrac{\pi}{2}) = 2,3960, \text{ poſito } \Phi = -90^\circ \text{ ſit}$$

$$V = 2\,\text{tang. } \alpha \sqrt{\text{coſ. } \alpha} + \Gamma : \alpha - 2,3960,$$

dummodo fuerit

$$2\,\text{tang. } \alpha \sqrt{\text{coſ. } \alpha} + \Gamma : \alpha < 2,3960, \text{ erit}$$

$$s = \frac{V}{2\sqrt{\text{coſ. } \Phi}} = -\infty,$$

tum autem erit

$$s\,\text{coſ. } \Phi = \tfrac{1}{2} V \sqrt{\text{coſ. } \Phi} = 0,$$

ideoque $x = -1$ et $y = x s = \infty$, ita vt abſciſſae $Ca = 1$ reſpondeat applicata infinita. Ramus igitur $CSYN$ vtique etiam eſt aſymptoticus ad rectam ef ſurſum productam conuergens, et figura iſta $MCSYN$ tractum noſtrae curuae quaeſitae exhibet. Praeterea etiam curua $mCsn$ priori aequalis infra tangentem Gg deſcripta pariter in noſtra ſolutione continetur et Problematis conditioni ſatisfacit.

§. 13. Inuenta iam figura noſtrae curuae videamus, quantum ea infra axem Aa deſcendat, ſiue quaeramus punctum eius Q, vbi applicata negatiua fit maxima, id quod euenit vbi tangens curuae QR axi eſt parallela,

rallela, hoc eſt, vbi inclinatio ad axem euaneſcit. Poſito igitur angulo $\Phi = 0$, ob $\Gamma : 0 = 1, 1980$ erit

$$V = 2 \text{ tang. } \alpha \sqrt{(\text{cof. } \alpha - 1)} + \Gamma : \alpha - 1, 1980,$$

ideoque arcus

$$CQ = s = \text{tang. } \alpha \sqrt{(\text{cof. } \alpha - 1)} + \tfrac{1}{2}\Gamma : \alpha - 0, 5990.$$

Tum vero coordinatae pro hoc puncto infimo erunt

$$CP = -(\text{tang. } \alpha - s) \text{ et } PQ = -(\text{tang. } \alpha - s)^2.$$

§. 14. Summa autem hic attentione digna eſt conditio ſupra memorata, qua, quo curuae ramus C S N ascendendo in infinitum porrigatur, requiritur vt ſit

$$2 \text{ tang. } \alpha \sqrt{\text{cof. } \alpha} + \Gamma : \alpha < 2, 3960.$$

Vtique enim euenire poteſt vt prodeat vel

$$2 \text{ tang. } \alpha \sqrt{\text{cof. } \alpha} + \Gamma : \alpha = 2, 3960, \text{ vel}$$

$$2 \text{ tang. } \alpha \sqrt{\text{cof. } \alpha} + \Gamma : \alpha > 2, 3960.$$

Priori caſu, ob $V = 0$ et $s = \frac{\circ}{\circ}$, arcus finitae longitudinis eſſe poterit; caſu altero foret V poſitiuum, ideoque Y quantitas negatiua. Sin autem applicata eſt infinitum negatiuum, ramus curuae aſymptoticus cum recta *e f* deorſum producta conueniet. Hinc diuerſae curuarum ſpecies naſcentur, quas accuratius conſideraſſe operae pretium erit.

§. 15. Ante autem quam hanc nouam inueſtigationem aggredimur, limitem noſſe oportet, vbi fit $V = 0$, quippe vltra quem citraque hae curuae noſtrae varietates oriuntur. Hunc in finem cum eſſe debeat

$$V = 2 \text{ tang. } \alpha \sqrt{\text{cof. } \alpha} + \Gamma : \alpha - 2, 3960 = 0,$$

quae-

quaeratur angulus α, vt fiat

$$\frac{\text{fin. } \alpha}{\sqrt{\text{cos. } \alpha}} + \tfrac{1}{2}\Gamma : \alpha = 1,198.$$

Cum igitur fit

$$\tfrac{1}{2}\Gamma : \alpha = \text{cos. } \alpha^{\frac{3}{2}} (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2,7} \text{cos. } \alpha^2 + \text{ etc.})$$

ſtatuatur

$$\text{cos. } \alpha (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2,7} \text{cos. } \alpha^2 + \text{ etc.}) = A,$$

eritque

$$\tfrac{1}{2}\Gamma : \alpha = A \sqrt{\text{cos. } \alpha}.$$

Poſito autem angulo $\alpha = 90° - \beta$, erit

$$A = \text{ſin. } \beta (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2,7} \text{ſin. } \beta^2 + \text{ etc.}),$$

cuius ſerici ſummam in priori diſſertatione pro pluribus anguli Φ valoribus exhibuimus. Depromantur igitur inde valores litterae A pro angulis β, a o vsque ad 90° progredientibus, iisque addantur valores $\frac{1}{2}\Gamma : \alpha$ et $\frac{\text{ſin. } \alpha}{\sqrt{\text{cos. } \alpha}}$, vnde ſequens tabula naſcitur:

β	α	A	$\frac{1}{2}\Gamma : \alpha$	$\frac{\text{ſin. } \alpha}{\sqrt{\text{cos. } \alpha}}$
0	90	0, 000	0, 000	∞
10	80	0, 058	0, 024	2, 363
20	70	0, 117	0, 068	1, 625
30	60	0, 177	0, 125	1, 224
45	45	0, 270	0, 227	0, 841
60	30	0, 369	0, 343	0, 537
90	0	0, 599	0, 599	0, 000

§. 16. Ex hac tabula ſtatim apparet, valorem anguli α, quem quaerimus, cadere intra limites $\alpha = 60°$ et $\alpha = 45$, vnde rite interpolando reperitur $\alpha = 52°, 55'$.

Hoc enim valore ſtabilito fit

$$\tfrac{1}{2}\Gamma : \alpha = 0,171 \text{ et } \tfrac{\text{ſin. } \alpha}{\sqrt{\text{coſ. } \alpha}} = 1,027,$$

ideoque

$$\tfrac{1}{2}V = \tfrac{\text{ſin. } \alpha}{\sqrt{\text{coſ. } \alpha}} + \tfrac{1}{2}\Gamma : \alpha - 1,1980 = 0,$$

vti requiritur. Hoc igitur valore inuento percurramus ſucceſſiue caſus ſequentes:

1°) vbi eſt $\alpha = 0$; 2°) vbi $\alpha < 52°, 55'$;

3°) vbi $\alpha = 52°, 55'$ et 4°) vbi $\alpha > 52°, 55'$,

vnde ſequentes quatuor ſpecies noſtrae curuae penitus a ſe inuicem diuerſae orientur.

Species I.

vbi $\alpha = 0$.

§. 17. Hic igitur erit $V = \Gamma : 0 - \Gamma : \Phi$, ideoque

$$s = \tfrac{1,1980}{2\sqrt{\text{coſ. } \Phi}} - \tfrac{\Gamma : \Phi}{2\sqrt{\text{coſ. } \Phi}}.$$

Eſt vero per ſeriem:

$$\tfrac{\Gamma : \Phi}{2\sqrt{\text{coſ. } \Phi}} = \text{coſ. } \Phi \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2.7} \text{coſ. } \Phi^2 + \tfrac{1.3}{2.4.11} \text{coſ. } \Phi^4 + \text{etc.}\right)$$

ſiue

$$\tfrac{\Gamma : \Phi}{2\sqrt{\text{coſ. } \Phi}} = \text{ſin. } \Psi \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2.7} \text{ſin. } \Psi^2 + \tfrac{1.3}{2.4.11} \text{ſin. } \Psi^4 + \text{etc.}\right)$$

poſito $\Phi = 90° - \Psi$. Quodſi igitur pro diuerſis anguli Ψ valoribus ſummam huius ſerici ex priori diſſertatione excerpamus, ipſique adiungamus valorem fractionis $\frac{1,1980}{2\sqrt{\text{coſ. } \Phi}}$; tum vero arcum:

$$s = \tfrac{1,1980}{2\sqrt{\text{coſ. } \Phi}} - \tfrac{\Gamma : \Phi}{2\sqrt{\text{coſ. } \Phi^2}}$$

abſciſſam porro

$$x = \text{ſin. } \Phi - s \text{ coſ. } \Phi$$

et

et applicatam $y = sx$, orietur ſequens tabula curuae momenta exhibens:

ψ	Φ	$\frac{1,1980}{2\sqrt{\cos.\Phi}}$	$\frac{\Gamma:\Phi}{2\sqrt{\cos.\Phi}}$	s	x	y
0	90	∞	0, 000	+ ∞	+ 1, 000	∞
5	85	2, 029	0, 029	+ 2, 000	+ 0, 822	1, 644
10	80	1, 437	0, 058	+ 1, 379	+ 0, 746	1, 029
15	75	1, 177	0, 087	+ 1, 090	+ 0, 684	0, 746
20	70	1, 024	0, 117	+ 0, 907	+ 0, 630	0, 571
30	60	0, 847	0, 177	+ 0, 670	+ 0, 531	0, 356
45	45	0, 712	0, 270	+ 0, 442	+ 0, 395	0, 175
60	30	0, 644	0, 369	+ 0, 275	+ 0, 262	0, 072
90	0	0, 599	0, 599	+ 0, 000	+ 0, 000	0, 000
120	− 30	0, 644	0, 918	− 0, 274	− 0, 262	0, 072
135	− 45	0, 712	1, 155	− 0, 443	− 0, 395	0, 175
150	− 60	0, 847	1, 517	− 0, 670	− 0, 531	0, 356
160	− 70	1, 024	1, 931	− 0, 907	− 0, 630	0, 571
165	− 75	1, 177	2, 267	− 1, 090	− 0, 684	0, 746
170	− 80	1, 437	2, 817	− 1, 379	− 0, 746	1, 029
175	− 85	2, 029	4, 029	− 2, 000	− 0, 822	1, 644
180	− 90	∞	∞	− ∞	− 1, 000	∞

Huius tabulae ope facile erit curuam conſtruere. In puncto enim C, vbi $\Phi = 0$, curua axem A a tangit, dehinc vero, ex vtraque parte aſcendendo, ad rectas E F et ef accedit, cum iisque ſurſum in infinitum productis confunditur. Erit ergo M Y C N, portio noſtrae curuae hac proprietate gaudentis, vt, ducta ex C per eius punctum quodvis Y recta C Y T, ſit arcus C Y = A T. Infra axem vero A a curua priori aequalis mCn, deſcribi poterit pariter in noſtra ſolutione contenta. Tab. III. Fig. 1.

Species II.

vbi $\alpha < 52^\circ\ 55'$.

§. 18. Hic igitur momenta noſtrae curuae erunt:

$$V = 2 \text{ tang. } \alpha (\sqrt{\text{cof. } \alpha - \sqrt{\text{cof. } \Phi}}) + \Gamma : \alpha - \Gamma : \Phi,$$

hincque

$$s = \frac{V}{2\sqrt{\text{cof. } \Phi}};$$

$$x = \text{ſin. } \Phi - \text{cof. } \Phi (\text{tang. } \alpha + s);$$

$$y = x (\text{tang. } \alpha + s);$$

tum autem, poſito $\Phi = -90^\circ$, prodibit valor

$$V = 2 \text{ tang. } \alpha \sqrt{\text{cof. } \alpha} + \Gamma : \alpha - 2,3960,$$

qui ob $\alpha < 52^\circ, 55'$ erit negatiuus, ita vt, poſito $\Phi = -90^\circ$, prodeat $s = -\infty$, $x = -1$ et $y = xs = \infty$. Hinc patet hunc caſum eum ipſum eſſe, quem iam ſupra, ante determinationem limitis α tractauimus, dum quantitati V negatiuum valorem tribuimus. Curua igitur hoc caſu oriunda formam habebit M C S N, iam ſupra deſcriptam cui infra tangentem G g curua ſimilis et aequalis m C $s\,n$ eſt addenda. Vtraque porro harum curuarum ſociam habet e parte axis A a contraria deſcriptam, et ob ambiguitatem ſignorum pariter in noſtra ſolutione contentam, quae binae curuae μ C S ν et μ' C $s\,\nu'$, quoniam eodem modo ac priores ad axem A a et rectas F F et cf ſunt relatae, et a recta $\Gamma\,\gamma$ etiam in puncto C tanguntur, exiſtente angulo A C Γ = A C G = α, pariter Problemati noſtro ſatisfacient.

Tab III. Fig. 2.

Species III.

vbi $\alpha = 52^\circ, 55'$.

§. 19. Hoc igitur caſu habebimus:

$\Gamma : \alpha = 0,342$ et $2 \text{ tang. } \alpha \sqrt{\text{cof. } \alpha} = 2,054$,

ideo-

ideoque

$$V = 2,396 - 2.1,323 \sqrt{\text{cos.}\Phi} - \Gamma : \Phi,$$

conſequenter

$$s = \frac{1,198}{\sqrt{\text{cos.}\Phi}} - 1,323 - \frac{\Gamma : \Phi}{2\sqrt{\text{cos.}\Phi}};$$

cum vero coordinatae erunt

$$x = \text{ſin.}\Phi - \text{cos.}\Phi\,(1,323 + s) \text{ atque}$$

$$y = x\,(1,323 + s).$$

Ex tabula igitur ſupra §. 17. exhibita pro quouis angulo Φ arcus s facillime determinari poteſt. Huic autem negotio ſupersedere eo potius poterimus, quod momenta inueſtigaturi pro puncto curuae Q, vbi applicata eſt maxima, mox deprehendemus, curuam hinc natam eam ipſam eſſe Lemniſcatam, cuius naturam in priore de hoc argumento diſſertatione iam ſatis exacte determinauimus. Erit igitur ex §. 13. pro noſtro caſu arcus

$$CQ = \text{tang.}\,\alpha\,(\sqrt{\text{cos.}\,\alpha} - 1) + \tfrac{1}{2}\Gamma : \alpha - 0,599 = -0,724$$ Tab. III. Fig. 3.

abſciſſa

$$CP = -(\text{tang.}\,\alpha - s) = -0,599,$$

ideoque applicata

$$PQ = -(\text{tang.}\,\alpha - s)^2 = -0,359.$$

§. 20. Ponatur nunc $\Phi = 90°$, eritque arcus

$$s = \frac{1,1980}{\sqrt{\text{cos.}\,\Phi}} = \infty \text{ et ob}$$

$$s\,\text{cos.}\,\Phi = \tfrac{1}{2}V\sqrt{\text{cos.}\,\Phi} = 0 \text{ erit}$$

$$x = \text{ſin.}\,\Phi = 1 \text{ et } y = x\,s = \infty.$$

Erit igitur M C ramus curuae aſymptoticus cum recta E F in infinitum ſurſum producta conueniens, qui, poſtquam in

C axem traiecit, vsque ad Q infra eum descendet, dehinc vero iterum ascendere incipiet, donec in puncto a cum recta ef confunditur. Posito enim $\Phi = -90°$, ob

$$\Gamma : (-\Phi) = 2,396 \text{ erit}$$

$$s = \frac{1,198}{\sqrt{\text{cos.}\Phi}} - 1,323 - \frac{1,198}{\sqrt{\text{cos.}\Phi}} = -1,323,$$

tum vero

$$x = \text{sin.}\Phi = -1 \text{ et } y = x(1,323 - 1,323) = 0.$$

Erit igitur $Ca = -1$ et arcus $CQa = 1,323$, vnde ob $CQ = 0,724$ erit $Qa = 0,599$, tum vero $CP = 0,599$, $Pa = 0,401$ et $PQ = 0,359$. Haec omnia perfecte congruunt cum iis, quae in priori de hoc argumento dissertatione §. 15. sunt tradita. Quodsi igitur huius curuae ramus similis mCA infra tangentem descriptus delineetur, vtriusque autem MCa et mCA socia ad partem axis oppositam describatur, quarum vtraque a recta $\Gamma\gamma$ in C tangatur, existente angulo $\Gamma CA = GCA = 52°, 55$, figura erit completa et ipsam eam Lemniscatam exhibet, quam Solutio specialis initio commemorata suppeditauerat.

Species IV.

vbi $\alpha > 52°, 55'$.

§. 21. Pro hoc igitur casu prodibit

$$V = 2 \text{ tang.} \frac{\alpha(V \text{ cos.}\alpha - V \text{ cos.}\Phi) + \Gamma : \alpha - \Gamma : \Phi}{},$$

ita vt posito $\Phi = -90°$ sit haec quantitas

$$V = 2 \text{ tang.} \frac{\alpha . V \text{ cos.}\alpha + \Gamma : \alpha - 2,396}{}$$

ideoque positiua, consequenter

$$s = \frac{V}{2\sqrt{\text{cos.}\Phi}} = \infty, \; x = -1, \; y = -\infty,$$

vnde

vnde concludimus, curuam habere ramum cum recta ef deorſum producta tanquam aſymptota conuenientem. Interim tamen, ſi quaeramus, quantum curua M C a recta E F diſcedens, poſtquam per punctum C tranſierit, infra axem deſcendat, formulae ſupra §. 13. traditae dant arcum

$$CQ = s = \text{tang. } \alpha\,(\sqrt{\text{cof. } \alpha} - 1) + \tfrac{1}{2}\Gamma : \alpha - 0{,}599,$$

abſciſſam

$$CP = -(\text{tang. } \alpha - s) = -(\text{tang. } \alpha(2 - \sqrt{\text{cof. } \alpha}) - \tfrac{1}{2}\Gamma : \alpha + 0{,}599)$$

et applicatam

$$PQ = -(\text{tang. } \alpha(2 - \sqrt{\text{cof. } \alpha}) - \tfrac{1}{2}\Gamma : \alpha + 0{,}599)',$$

quae nullo modo infinita fieri poteſt, niſi caſu $\alpha = 90°$, quo caſu curua axem normaliter in C traiicit, inde vero dextrorſum deſcendendo continuo longius ab eo remouetur. Quamdiu autem valor anguli α intra limites $\alpha = 52°.55'$ et $\alpha = 90°$ accipitur, dabitur neceſſario applicata maxima P Q finitae magnitudinis, vltra quam curua, poſtquam punctum Q attigerit, iterum aſcendere debet. Hoc autem cum applicata illa infinita negatiua alio modo conciliari nequit, niſi ſtatuatur, curuam M C Q a puncto Q aſcendentem non vltra certum quendam limitem N porrigi, ibique cuspidem formare, ex qua ramus aſymptoticus N K ad rectam ef deorſum productam deſcendendo conuergit. Tab. III. Fig. 4.

§. 22. Inueſtigemus igitur punctum N, vltra quod curua M C Q N aſcendere nequit. Hunc in finem quaeramus primo maximam arcus C Q N longitudinem, quae inuenitur ponendo $\frac{ds}{d\Phi} = 0$. Reuertendo igitur ad aequationem differentialem inter s et Φ §. 8. exhibitam, quae erat

$$2\,d\,s\,\text{cof.}\,\Phi = s\,d\,\Phi\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{d\,\Phi\,\text{cof.}\,(\Phi-\alpha)}{\text{cof.}\,\alpha},$$

habebimus

$$\frac{d\,s}{d\,\Phi} = \frac{s\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\alpha + \text{cof.}\,(\Phi-\alpha)}{2\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\Phi} = 0,$$

vnde fit arcus

$$\text{C Q N} = s = -\frac{\text{cof.}\,(\Phi-\alpha)}{\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\alpha} = -\,\text{cot.}\,\Phi - \text{tang.}\,\alpha.$$

Hinc porro erit tang. $\alpha + s = -\,\text{cot.}\,\Phi$, ideoque

$$x = \text{fin.}\,\Phi + \frac{\text{cof.}\,\Phi^2}{\text{fin.}\,\Phi} = \frac{1}{\text{fin.}\,\Phi} \text{ et } y = -\frac{\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi^2}.$$

Ipſe autem angulus Φ, ſiue inclinatio curuae ad axem in puncto N, ex hac aequatione definiri debet:

$$2\,s\,\sqrt{\text{cof.}\,\Phi} = 2\,\text{tang.}\,\alpha\,(\sqrt{\text{cof.}\,\alpha} - \sqrt{\text{cof.}\,\Phi}) + \Gamma : \alpha - \Gamma : \Phi,$$

quae ob $s = -\,\text{cot.}\,\Phi - \text{tang.}\,\alpha$ reducitur ad hanc:

$$\Gamma : \Phi - \frac{2\,\text{cof.}\,\Phi^{\frac{3}{2}}}{\text{fin.}\,\Phi} = \frac{2\,\text{fin.}\,\alpha}{\sqrt{\text{cof.}\,\alpha}} + \Gamma : \alpha.$$

§. 23. Quod ſi iam valor huius anguli Φ, quem non niſi per longas ambages approximando ex aequatione modo inuenta determinare licet, ponatur $\Phi = -\gamma$, (euidens enim eſt eum eſſe negatiuum) pro puncto arcus extremo N habebimus coordinatas

$$\text{C X} = -\frac{1}{\text{fin.}\,\gamma} \text{ et } \text{X N} = -\frac{\text{cof.}\,\gamma}{\text{fin.}\,\gamma^2}$$

et ipſum arcum

$$\text{C Q N} = \text{cot.}\,\gamma - \text{tang.}\,\alpha.$$

Ducatur nunc recta C N, eritque

$$\text{C N} = \sqrt{(\text{C X}^2 + \text{X N}^2)} = \frac{1}{\text{fin.}\,\gamma^2};$$

tum vero erit

$$\text{tang. X C N} = \frac{\text{N X}}{\text{C X}} = \text{cot.}\,\gamma, \text{ ideoque}$$

$$\text{X C N} = 90^\circ - \gamma \text{ et } \text{C N X} = \gamma,$$

vnde

vnde si ex N in C N normalis erigatur N Z, erit etiam angulus C Z N $= \gamma$, ideoque N Z erit tangens curuae in puncto N, ita vt curua, quae ob C X $>$ C a semper vltra rectam $e f$ porrigitur, rectae C N in N normaliter insistat. Quoniam autem, vti iam supra obseruauimus, absciſſae C $a = -1$ respondet applicata infinita negatiua, omnino neceſſe eſt, vt curua in puncto N habeat cuspidem, indeque regrediatur et deſcendendo cum recta $e f$ deorſum producta tandem conueniat, vnde oritur ramus aſymptoticus N K.

§. 24. Praeterea vero, quia recta A a ſemper eſt diameter, ad alteram eius partem dabitur curua ſimilis m C $n k$, ex cuius cuspide n pariter ramus aſymptoticus $n k$ ſurſum vergens cum recta $e f$ producta in infinito confundetur, altero ramo C m ad aſymptotam E F accedente. Tum ſi ex parte tangentis oppoſita curuae ſimiles delineentur μ C $\nu \kappa$ et μ' C $\nu' \kappa'$, figura omnibus numeris erit completa et ſolutioni generali accommodata.

§. 25. En ergo quatuor curuarum ſpecies nacti ſumus inter ſe maxime diuerſas, quae omnes hac proprietate gaudent: vt portiones earum inter rectas in puncto C concurrentes contentas aequales ſint interuallis ab eodem angulo in rectis poſitione datis E F et $e f$ abſciſſis. Quantumuis autem hae quatuor ſpecies noſtrae curuae ratione figurae a ſe inuicem discrepant, maxime tamen inter ſe cohaerent et cum principio continuitatis pulcherrime conciliari poſſunt. Nam ſi verbi gratia in hac quarta ſpecie ſtatuatur angulus Φ rectus, ideoque $\gamma = 90°$, erit

$$CN = 1 = Ca \text{ et } XN = 0.$$

Ambo igitur puncta N et n in a incidunt, fietque ex §. 22.

$$\frac{2\,sin.\,\alpha}{\sqrt{cos.\,\alpha}} + \Gamma : \alpha = \Gamma : (-\gamma) = 2,396$$

ideoque $\alpha = 52^{\circ}, 55$, vnde oritur curua tertiae speciei. Simili modo species tertia ex secunda oritur, statuendo $\Phi = 90^{\circ}$, vnde fit $CS = 1 = Ca$, ita vt punctum S in a cadat, in quo ergo applicata euanescere debet, quod fieri nequit, nisi fit $V = 0$, hoc est

$$\frac{2\,sin.\,\alpha}{\sqrt{cos.\,\alpha}} + \Gamma : \alpha = 2,396;$$

vnde iterum fit $\alpha = 52^{\circ}, 55'$. Ex ternis vero postremis speciebus oritur prima, si statuatur $\alpha = 0$; tum enim in genere pro omnibus tribus speciebus patet, pro puncto infimo Q ex §. 13, fore $CQ = s = 0$, $CP = 0$ et $PQ = 0$, ita vt punctum Q in ipsum C incidat. Ceterum ipsa origo harum varietatum nostrae curuae, ex diuersa positione tangentis Gg prouenientium, intimum nexum inter has species, figura maxime inter se diuersas, abunde declarat. Interim tamen egregium istum consensum ideo adcuratius indigitasse operae pretium videbatur, quod inde principium continuitatis denuo confirmatur.

METHODVS INVESTIGANDI INTEGRALE AEQVATIONIS

$$dp(1-p)(nn-ss)+ds(nn+p^3+ps+pps)=0.$$

Auctore

S. RUMOVSKI.

§. 1.

In parte posteriori Actorum Academiae Scientiarum pro Anno 1778 editorum Illustris *Eulerus* in resolutione Problematis, quo quaerebatur motus corporis filo alicubi alligati, super plano horizontali, pervenit ad aequationem, de cuius Integratione agere coram Academia constitui. Dedit equidem Vir summus Integrale aequationis propositae, ast vt ipse fatetur, non nisi per longas ambages ad illud deductus est; cogitaui igitur num forte detur alia facilior via Integrale aequationis propositae eliciendi; et cum voto potitus esse mihi videar, quae de Integratione huius aequationis meditatus sum, constitui Academiae Scientiarum exponere.

§. 2. Aequatio propoſita, poſito $s = p\,q$, induet formam ſequentem

$$dp(1-p)(nn-ppqq)+(p\,dq+q\,dp)(nn+p^2+ppq+p^3q)=0$$

quae actu euoluta dabit

$$nndp(1-p)+pdp(nn+p^2+ppq+p^3q)$$
$$+qdp(nn+p^2+2p^2q)=0.$$

Cum in vltimo membro occurrat p^2+2p^2q, ſtatuatur

$$(1+2q)pp=tt,\text{ vt ſit }p=\frac{t}{\sqrt{(2q+1)}};$$

$$dp=\frac{dt}{\sqrt{(2q+1)}}-\frac{t\,dq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dp(1-p)=\frac{dt}{\sqrt{(2q+1)}}-\frac{t\,dq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}}-\frac{t\,dt}{2q+1}+\frac{tt\,dq}{(2q+1)^2}$$

$$nn+p^2+ppq+p^3q=nn+\frac{tq}{2q+1}$$
$$+\frac{t^2}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{t^3q}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}}\text{ et}$$
$$nn+p^2+2p^3q=nn+\frac{t^3}{\sqrt{(2q+1)^3}}.$$

His valoribus ſubſtitutis habebitur

$$\frac{nndt(1+q)}{\sqrt{(2q+1)}}-\frac{nnt\,dt}{2q+1}+\frac{nntq\,dq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{nnttdq}{(2q+1)^2}+\frac{qt^3dt}{2q+1}$$
$$+\frac{t^4dq}{(2q+1)^3}+\frac{t^3q\,dq}{(2q+1)^{\frac{5}{2}}}=0.$$

Ordinetur aequatio ſecundum differentialia quantitatum variabilium, et prodibit

$$\frac{ndt(1+q)}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{nntdt}{2q+1} + \frac{qtdt}{2q+1}$$
$$+ \frac{nntqdq + t^3qdq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{nntdq + t^3dq}{(2q+1)^2} = 0,$$

quae porro reduci se patitur ad hanc

$$\frac{ndt(1+q)}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{nntdt}{2q+1} + \frac{qtdt}{2q+1}$$
$$+ t(nn+tt)\left(\frac{qdq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{tdq}{(2q+1)^2}\right) = 0.$$

§. 3. Iam hic obseruo vltimi membri, si t spectetur vt constans, integrale fore aut

$$t(nn+tt)\left(\frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{t}{2(2q+1)}\right) \text{ aut}$$
$$t(nn+tt)\left(\frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}} + \frac{tq}{2q+1}\right).$$

Assumamus illud esse

$$t(nn+tt)\left(\frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{t}{2(2q+1)}\right),$$

et sumto differentiali nullo habito discrimine variabilium patebit differentiale illius parum dissentire ab aequatione proposita: prodit enim

$$\frac{ndt(1+q)}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{nntdt}{2q+1} + \frac{ttdt(1+q)}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{tt dt}{2q+1}$$
$$+ t(nn+tt)\left(\frac{qdq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{tdq}{(2q+1)^2}\right) = 0.$$

Dabitur igitur aliquis factor, in quem formula

$$t(nn+tt)\left(\frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{t}{2(2q+1)}\right)$$

ducta fit integrale aequationis propositae. Sit ille $\frac{s}{L}$, vt Integrale quaesitum sit

$\frac{4}{L}(nn+tt)\left(\frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}}-\frac{1}{2(2q+1)}\right)=\alpha$ fiue

$t(nn+tt)\left(\frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}}-\frac{1}{2(2q+1)}\right)=\alpha L.$

§. 4. A differentiali huius aequationis si subtrahatur aequatio proposita habebitur

$$\frac{2ttdt(1+q)}{\sqrt{(2q+1)}}-\frac{2t^3dt}{2q+1}-\frac{qt^3dt}{2q+1}=\alpha dL.$$

Est vero

$$\frac{qt^3}{2q+1}=\frac{1}{2}t^3-\frac{t^3}{2(2q+1)};$$

vnde nanciscimur

$$\alpha dL=3ttdt\left(\frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}}-\frac{1}{2(2q+1)}\right)-\frac{1}{2}t^3dt.$$

At cum sit

$$\frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}}-\frac{1}{2(2q+1)}=\frac{\alpha L}{2(nn+tt)}$$

prodibit

$$\alpha dL-\frac{3\alpha Lttdt}{2nn+tt}=-\frac{1}{2}t^3dt,$$

quae, quoniam

$$-\int\frac{ttdt}{nn+tt}=-\frac{1}{2}l(nn+tt),$$

per notas Analyseos regulas ducta in $(nn+tt)^{-\frac{3}{2}}$ fiet integrabilis. Prodit enim

$$\frac{\alpha dL}{(nn+tt)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3\alpha Lttdt}{(nn+tt)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{\frac{1}{2}t^3dt}{(nn+tt)^{\frac{5}{2}}}.$$

Cuius integrale est

$$\frac{\alpha L}{(nn+tt)^{\frac{3}{2}}}=\mathbb{C}-\frac{1}{2}\int\frac{t^3dt}{(nn+tt)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\mathbb{C}-\frac{1}{2}\sqrt{(nn+tt)}-\frac{\frac{1}{2}nn}{\sqrt{(nn+tt)}}\text{ et}$$

$$\alpha L=$$

$$\alpha L = C\,(n\,n + t\,t)^{\frac{s}{2}} - (n\,n + \tfrac{r}{2}\,t\,t)\,(n\,n + t\,t).$$

Vnde colligitur integrale aequationis quaesitum

$$s\,(n\,n + t\,t)\left(\frac{1 + q}{\sqrt{(2\,q + 1)}} - \frac{f}{2\,(2\,q + 1)}\right) = C\,(n\,n + t\,t)^{\frac{s}{2}} - (n\,n + \tfrac{1}{2}\,t\,t)\,(n\,n + t\,t),$$

siue

$$\frac{s\,(r + \sigma)}{\sqrt{(2\,q + 1)}} + \frac{t\,t\,q}{2\,q + 1} = C\sqrt{(n\,n + t\,t)} - n\,n,$$

ac tandem in locum ipsius t facta debita substitutione resultabit:

$$C\sqrt{(n\,n + 2\,p\,s + p\,p)} - n\,n = p + s + p\,s \text{ siue}$$

$$C = \frac{n\,n + p + s + p\,s}{\sqrt{(n\,n + 2\,p\,s + p\,p)}}.$$

§. 5. Cum membri

$$t\,(n\,n + t\,t)\left(\frac{q\,d\,q}{(2\,q + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{t\,d\,q}{(2\,q + 1)^{2}}\right),$$

integrale quoque sit

$$t\,(n\,n + t\,t)\left(\frac{1 + q}{\sqrt{(2\,q + 1)}} + \frac{t\,q}{2\,q + 1}\right),$$

spectato nimirum t vt constante, similem in modum ex hoc quoque fonte integrale aequationis quaesitum hauriri poterit. Assumto enim integrali

$$\frac{1}{L}\,(n\,n + t\,t)\left(\frac{1 + q}{\sqrt{(2\,q + 1)}} + \frac{t\,q}{2\,q + 1}\right) = \omega,$$

et procedendo vt supra deducimur primum ad aequationem:

$$\frac{2\,n\,n\,q\,t\,d\,t}{2\,q + 1} + \frac{n\,n\,t\,d\,t}{2\,q + 1} + \frac{3\,t\,t\,d\,t\,(q + 1)}{\sqrt{(2\,q + 1)}} + \frac{3\,q\,t^{3}\,d\,t}{2\,q + 1} = \alpha\,d\,L,$$

quae ob

$$\frac{2\,n\,n\,q\,t\,d\,t + n\,n\,t\,d\,t}{2\,q + 1} = n\,n\,t\,d\,t \text{ et}$$

$$\frac{3\,t\,t\,d\,t\,(q + 1)}{\sqrt{(2\,q + 1)^{3}}} + \frac{3\,q\,t^{3}\,d\,t}{2\,q + 1} = 3\,t\,t\,d\,t\left(\frac{1 + q}{\sqrt{(2\,q + 1)^{3}}} + \frac{t\,q}{2\,q + 1}\right),$$

muta-

mutabitur tandem in sequentem:

$$\alpha\, d\, L - \frac{\alpha L\, t\, dt}{nn+tt} = nn\, t\, dt.$$

Cuius integrale est in promtu; scilicet

$$\frac{\alpha L}{(nn+tt)^{\frac{1}{2}}} = C - \int \frac{nn\, t\, dt}{(nn+tt)^{\frac{3}{2}}} = C - \frac{nn}{\sqrt{(nn+tt)}}.$$

Hinc

$$\alpha L = t(nn+tt)\left(\frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}} + \frac{tq}{2q+1}\right)$$
$$= C(nn+tt)^{\frac{1}{2}} - nn(nn+tt),$$

ac tandem

$$\frac{t(1+q)}{\sqrt{(2q+1)}} + \frac{ttq}{2q+1} = C\sqrt{(nn+tt)} - nn.$$

§. 6. Et si facile praeuidere erat, posito multiplicatore M, vt sit $\frac{1}{L} = M$, pro vtroque casu illum proditurum reciprocum supra inuenti; attamen instituto tentamine non nisi post substitutiones demum in primo casu

$$\frac{qt^3\, dt}{2q+1} = \frac{1}{2}t^3\, dt - \frac{t^3\, dt}{2(2q+1)} \text{ et } \frac{nnt\, dt}{2q+1} = \frac{nnt\, dt}{2(2q+1)} + \frac{nnt\, dt}{2(2q+1)},$$

in secundo vero

$$-\frac{nnt\, dt}{2q+1} = \frac{2nnqt\, dt}{2q+1} - nnt\, dt = \frac{nnqt\, dt}{2q+1} + \frac{nnqt\, dt}{2q+1} - nnt\, dt$$

aequationem nostram ad formam differentialis fictae reducere, et tandem ipsum multiplicatorem elicere licuerit. Post modum re perpensa vidi iisdem substitutionibus ipsam nostram aequationem reduci ad integrabilem. Posito enim breuitatis gratia:

$$\frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{1}{2(2q+1)} = Q \text{ et } \frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}} + \frac{tq}{2q+1} = P,$$

erit

$$dQ =$$

$$dQ = \frac{q\,dq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{t\,dq}{(2q+1)^2} - \frac{dt}{2(2q+1)} \text{ et}$$

$$dP = \frac{q\,dq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{t\,dq}{(2q+1)^2} + \frac{q\,dt}{2q+1}.$$

Quodſi in aequatione

$$\frac{nn\,dt\,(1+q)}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{nn\,t\,dt}{2q+1} + \frac{q\,t^3\,dt}{2q+1}$$

$$+ t\,(nn+tt)\left(\frac{q\,dq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{t\,dq}{(2q+1)^2}\right) = 0$$

in locum $\frac{q\,t^3\,dt}{2q+1}$ ſcribatur $\frac{1}{2}t^3\,dt - \frac{t^3\,dt}{2(2q+1)}$
et $\frac{nn\,t\,dt}{2q+1}$ diſpeſcatur in partes $\frac{nn\,t\,dt}{2(2q+1)} + \frac{nn\,t\,dt}{2(2q+1)}$,
orietur

$$nn\,dt\left(\frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{t}{2(2q+1)}\right)$$

$$+ t\,(nn+tt)\left(\frac{q\,dq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{t\,dq}{(2q+1)^2} - \frac{dt}{2(2q+1)}\right) + \tfrac{1}{2}t^3\,dt = 0$$

ſiue

$$t\,(nn+tt)\,dQ + nn\,Q\,dt + \tfrac{1}{2}t^3\,dt = 0.$$

At ſi in eadem aequatione in locum $-\frac{nn\,t\,dt}{2q+1}$ ſubſtituatur

$$\frac{2nn\,q\,t\,dt}{2q+1} - nn\,t\,dt = \frac{nn\,q\,t\,dt}{2q+1} + \frac{nn\,q\,t\,dt}{2q+1} - nn\,t\,dt,$$

habebitur:

$$n\,n\,d\,t\left(\frac{1+q}{\sqrt{(2q+1)}}+\frac{t\,q}{2q+1}\right)$$
$$+t(nn+tt)\left(\frac{q\,d\,q}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{t\,d\,q}{(2q+1)^2}-\frac{a\,d\,t}{2q+1}\right)-n^4\,t\,dt=0,$$

fiue

$$t(n\,n+t\,t)\,d\,\mathrm{P}+n\,n\,\mathrm{P}\,d\,t-n\,n\,t\,d\,t=0,$$

quarum vtraque manifeſto eſt integrabilis. Si igitur ſubſtitutiones has principio in aequationem introducere in mentem veniſſet, totum negotium facillime confici potuiſſet.

§. 7. Quo appareat formulam inuentam

$$\mathrm{C}=\frac{n\,n+p+s+p\,s}{\sqrt{(n\,n+2\,p\,s+p\,p)}}$$

eſſe Integrale aequationis propoſitae, multiplicetur illa vtrinque per denominatorem, vt habeatur:

$$\mathrm{C}\,\sqrt{(n\,n+2\,p\,s+p\,p)}=n\,n+p+s+p\,s$$

et ſumto differentiali habebitur:

$$\frac{\mathrm{C}\,(p\,d\,s+(p+s)\,d\,p)}{\sqrt{(n\,n+2\,p\,s+p\,p)}}=d\,p+d\,s+p\,d\,s+s\,d\,p$$
$$=d\,p\,(1+s)+d\,s\,(1+p)$$

eſt autem

$$\frac{\mathrm{C}}{\sqrt{(n\,n+2\,p\,s+p\,p)}}=\frac{n\,n+p+s+p\,s}{n\,n+2\,p\,s+p\,p},$$

quo ſubſtituto et ordinata aequatione prodit tandem

$$d\,p\,(1-p)\,(n\,n+s\,s)+d\,s\,(n\,n+p^2+p\,s+p\,p\,s)=0.$$

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE OSCILLATIONIBVS MINIMIS FVNIS LIBERE SVSPENSI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Sit tota longitudo funis $OMF = a$ et ſpecies eius talis, vt ſi longitudo ponatur $= e$, pondus ſit $= E$; vnde noſtri funis pondus erit $= \frac{Ea}{e}$. Iam elapſo tempore $= t$ teneat funis ſitum OMF, qui a recta verticali OA quam minime diſtet, ita vt recta OA longitudini funis aequalis cenſeri queat; vnde ſit $OA = a$. Iam vocetur abſciſſa $AP = x$, applicata $PM = y$ et arcus $FM = s$, qui ergo abſciſſae x aequalis aeſtimatur. Conſideretur nunc elementum $Mm = ds = dx$, eiusque pondus erit $= \frac{Edx}{e}$, quo pondere hoc elementum deorſum in directione MQ vrgetur. Tum vero ſit tenſio funis in $M = T$, in m vero $= T + dT$: atque euidens eſt, incrementum tenſionis dT ponduſculo eius Tab. IV. Fig. 4.

elementi Mm, quod eſt $\frac{E\,dx}{e}$, aequale eſſe debere, quia ſingula funis elementa quam minime a directione verticali declinant; vnde cum ſit $dT = \frac{E\,dx}{e}$, erit $T = \frac{Ex}{e}$. Sicque in ipſo puncto ſuſpenſionis O tenſio funis erit $T = \frac{Ea}{e}$, ſcilicet toti ponderi funis aequalis.

§. 2. Quia nunc punctum M a tenſione T deorſum trahitur, a tenſione vero $T + dT$ ſurſum, ob declinationem minimam ab illa tenſione T in directione MP ſollicitabitur vi $= \frac{T\,dy}{dx}$; ergo a tenſione $T + dT$ in directionem contrariam MR vrgebitur vi $= \frac{T\,dy}{dx} + d.\frac{T\,dy}{dx}$, ſicque vis reſidua in directione MR vrgens $= d.\frac{T\,dy}{dx}$. Quoniam igitur inuenimus tenſionem $T = \frac{Ex}{e}$, erit iſta vis

$$= \frac{E}{e}\,d.\frac{x\,dy}{dx} = \frac{E}{e}\left(\frac{x\,ddy}{dx} + dy\right)$$

ſumto elemento dx conſtante; quae vis ſi diuidatur per maſſulam $\frac{E\,dx}{e}$, erit vis acceleratrix $= \frac{x\,ddy}{dx} + \frac{dy}{dx}$. In hac determinatione vis acceleratricis ad variationem temporis non reſpeximus; quare cum applicata y tanquam functio ambarum variabilium x et t ſpectari debeat, iſtam vim acceleratricem more ſolito ita exhiberi oportet, vt ſit $x\left(\frac{d\,dy}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)$, ſiue $= \left(\frac{d.x\,dy}{dx^2}\right)$.

§. 3. Quoniam igitur funis punctum M aliam motum habere nequit, niſi in directione PM, eius celeritas in hac directione erit $= \left(\frac{dy}{dt}\right)$; hincque eius acceleratio $= \left(\frac{d\,dy}{dt^2}\right)$, quae diuiſa per $2g$, (denotante g altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo) dat ipſam vim acce-

acceleratricem $= \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, ita vt nunc habeamus iſtam aequationem differentio-differentialem:

$$\left(\frac{dxdy}{dx^2}\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right), \text{ ſiue}$$
$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2g\,x\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + 2g\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

In qua aequatione omnes plane motus, quos funis noſter ex O ſuſpenſus recipere poteſt, continentur. Facile autem intelligitur, hos motus in infinitum variari poſſe, prouti initio funi alius atque alius ſtatus, tam ratione figurae quam motus, fuerit inductus.

§. 4. Totum ergo negotium huc eſt perductum, vt integrale completum iſtius aequationis differentialis inueſtigetur, quod ſi ſucceſſerit, omnes funis motus aeque feliciter determinare poterimus, ac praeſtare licuit in motu chordarum, vbi pro ſtatu initiali quocunque totum motum ſequentem aſſignare valuimus. Verum hic maxima occurrit difficultas, cum nullo artificio aequationis inuentae integrale completum adhuc exquirere licuerit, ita vt de ſolutione perfecta iſtius problematis deſperare ſimus coacti.

§. 5. Quare praeclare nobiscum agi erit cenſendum, ſi modo ſolutiones particulares nobis exhibere licuerit; tales autem ſolutiones ea methodo, qua celeberrimus *Daniel Bernoulli* primus feliciter eſt vſus, plures atque adeo infinitas reperire licebit, quae, quomodocunque inter ſe coniunctae, problemati itidem ſatisfaciunt; etiam infinitos motus diuerſos, quos funis recipere poteſt, aſſignare poterimus, ita vt hinc ſolutio propemodum completa obtineri

tineri videatur, quae tamen semper eo laborabit defectu, vt ad statum initialem quemcunque neutiquam applicari possit.

§. 6. Tales autem solutiones particulares reperiemus, si in eos casus inquiramus, quibus noster funis motum oscillatorium regularem, perinde ac pendulum simplex, recipere potest. Ponamus igitur motum funis ita esse comparatum, vt cum motu penduli simplicis, cuius longitudo sit $= f$, conueniat; id quod eueniet, si fuerit

$$\tfrac{1}{2g}\left(\tfrac{d\,d\,y}{dt^2}\right) = -\tfrac{y}{f}, \text{ siue } \left(\tfrac{d\,d\,y}{dt^2}\right) = -\tfrac{2gy}{f},$$

quae aequatio bis integrata praebet:

$$y = \mathrm{F}\sin.\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}}\right),$$

vbi F et ζ sunt binae constantes arbitrariae per duplicem integrationem ingressae. Quia autem hic alteram variabilem x pro constante habuimus, istae litterae etiam vt functiones ipsius x spectari poterunt.

§. 7. Cum nunc posuerimus $\tfrac{1}{2g}\left(\tfrac{d\,d\,y}{dt^2}\right) = -\tfrac{y}{f}$, necesse est, vt etiam sit $\left(d.\tfrac{x\,d\,y}{dx^2}\right) = -\tfrac{y}{f}$; in qua aequatione cum tempus t non amplius insit, id nunc vt constans spectari poterit, ita vt habeamus:

$$\tfrac{d.\,x\,dy}{dx^2} = \tfrac{x\,d\,d\,y}{dx^2} + \tfrac{dy}{dx} = -\tfrac{y}{f}.$$

Verum hic iterum superius incommodum vsu venit, vt ista aequatio nullo modo integrari queat; vnde coacti sumus eius integrationem per approximationes saltem inuestigare, quod igitur hic tanquam nobis concessum assumamus. Quo autem facilius appareat, qualis functio ipsius x hinc pro y sit proditura, longitudinem f, quae hic potissimum

tissimum definiri debet, ex calculo elidamus, ponendo $x = fu$; tum enim habebimus hanc aequationem:

$$\frac{u}{du^2}\frac{d}{du}\frac{dy}{du} + \frac{dy}{du} = -y.$$

Vnde concludimus, applicatam y certae cuipiam functioni ipsius u aequalem fore, quam functionem hoc charactere indicemus: $\Pi : u$, ita vt sit $y = \Pi : u$; tum vero etiam satisfaciet $y = G.\Pi : u$, vbi constans G etiam tempus t, quippe quod in hoc calculo vt constans est spectatum, vtcunque inuoluere potest; at loco u valore $\frac{x}{f}$ restituto erit $y = G.\Pi : \frac{x}{f}$.

§. 8. Hoc igitur modo geminos valores pro y sumus adepti, quos inter se aequales esse oportet; primo scilicet est $y = F\,\text{sin.}(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{f}})$, deinde etiam $y = G.\Pi : \frac{x}{f}$, qui valores vt inter se aequales reddantur, quoniam F complectitur functionem quamcunque ipsius x, at G functionem quamcunque ipsius t, euidens est, statui debere

$$F = \Pi : \frac{x}{f} \text{ et } G = \text{sin.}(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{f}})$$

vbi pro ζ vera quantitas constans accipi debet. Hoc igitur modo deducti sumus ad sequentem solutionem nostri problematis particularem, quae est

$$y = \Pi : (\tfrac{x}{f}\,.\,\text{sin.}(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}})), \text{ siue etiam}$$
$$y = \mathfrak{A}.\Pi : \tfrac{x}{f}\,.\,\text{sin.}(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}}),$$

vbi $\mathfrak{A}$ denotat quantitatem constantem quamcunque; atque iste valor ipsius y aequationi nostrae differentio-differentiali:

$$\tfrac{2}{2g}(\tfrac{d}{dt^2}\tfrac{dy}{dt^2}) = x(\tfrac{d}{dt^2}\tfrac{dy}{dt^2}) + (\tfrac{dy}{dx}),$$

ſemper ſatisfacit, quamcunque magnitudinem ipſi f tribuamus.

§. 9. Verum hactenus nondum praecipuae conditionis, quam noſtrum problema involuit, rationem habuimus, qua funis in puncto O fixus ſtatuitur, cui conditioni vt ſatisfaciamus, neceſſe eſt vt poſito $x = a$ fiat $y = 0$, idque pro omni tempore; vnde patet, eſſe debere $0 = \Pi : \frac{a}{f}$. Quare cum Π ſit certa quaedam functio determinata, etiamſi nobis ſit incognita, quantitatem f ita aſſumi oportet, vt fiat $\Pi : \frac{a}{f} = 0$; hinc ſcilicet pertingimus ad certam quandam aequationem, quae praeter quantitatem cognitam a etiam incognitam f complectetur, ex qua propterea valorem ipſius f ſcrutari oportebit.

§. 10. Quodſi haec aequatio $\Pi : \frac{a}{f} = 0$ eſſet algebraica, ad certum dimenſionum numerum ipſius f aſſurgens, ex ea totidem valores pro f erui poſſent. Verum cum iſta functio $\Pi : \frac{a}{f}$ ſit maxime tranſcendens, ita vt aliter niſi per ſeriem infinitam exhiberi nequeat, in ea quantitas incognita f ad numerum infinitum aſcendere eſt cenſenda; vnde etiam innumeri valores idonei huius quantitatis f reſultabunt.

§. 11. Quanquam autem indoles iſtius functionis Π nobis plane eſt incognita, tamen tuto aſſumere licet, hanc aequationem: $\Pi : \frac{a}{f} = 0$, innumerabiles inuoluere radices, quas, etſi adhuc incognitas, his litteris indicemus: f; f'; f''; f'''; f''''; etc. ex quarum qualibet peculiarem motum regularem, quem funis noſter recipere valeat, elicie-

mus;

mus; omnes ſcilicet iſti motus ſequentes praebebunt aequationes:

I. $y = \mathfrak{A}\Pi : \frac{x}{f}$ ſin. $(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{f}})$.
II. $y = \mathfrak{B}\Pi : \frac{x}{f'}$ ſin. $(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{f'}})$.
III. $y = \mathfrak{C}\Pi : \frac{x}{f''}$ ſin. $(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{f''}})$.
IV. $y = \mathfrak{D}\Pi : \frac{x}{f'''}$ ſin. $(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{f'''}})$.
V. $y = \mathfrak{E}\Pi : \frac{x}{f''''}$ ſin. $(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{f''''}})$.
etc. etc.

§. 12. Hinc igitur patet, infinitis modis fieri poſſe, vt idem funis ex puncto O ſuſpenſus oſcillationes regulares et pendulo cuipiam ſimplici conformes abſoluat; ſi modo initio ipſi talis ſtatus fuerit impreſſus, qualis ad ſingulos hos motus producendos requiritur; pendulorum autem omnibus his motibus ſynchronorum longitudines erunt ipſae radices ſupra memoratae f; f'; f''; f'''; f''''; etc. Vnde ſimul patet, eas tantum radices motus reales ſuppeditare, quae non ſolum ſint reales, ſed etiam poſitiuae.

§. 13. His inuentis cum in aequatione differentio-differentiali

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = x\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)$$

variabilis y in omnibus terminis vnicam habeat dimenſionem, manifeſtum eſt, ſi iſti aequationi ſatisfaciant ſeorſim valores $y = P$; $y = Q$; $y = R$; tum eidem quoque eſſe ſatisfacturum hunc valorem ex illis vtcunque compoſitum:

$$y = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \text{etc.}$$

Vnde pro motu noſtri funis ex ſuperioribus ſolutionibus

particularibus colligimus hanc ſolutionem maxime generalem:

$$y = \mathfrak{A}\Pi : \tfrac{\alpha}{f} \cdot \text{ſin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}}) + \mathfrak{B}\Pi : \tfrac{x}{f'} \cdot \text{ſin.}\,(\zeta' + t\sqrt{\tfrac{2g}{f'}})$$
$$+ \mathfrak{C}\Pi : \tfrac{x}{f''}\,\text{ſin}\,(\zeta'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{f''}}) + \mathfrak{D}\Pi : \tfrac{x}{f'''}\,\text{ſin.}\,(\zeta''' + t\sqrt{\tfrac{2g}{f'''}})$$
$$+ \mathfrak{E}\Pi : \tfrac{x}{f''''}\,\text{ſin.}\,(\zeta'''' + t\sqrt{\tfrac{2g}{f''''}}) + \text{etc.}$$

In ſe enim complectitur non ſolum innumerabiles coefficientes conſtantes, nempe $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{E}$; etc. ſed etiam totidem angulos arbitrarios ζ; ζ'; ζ''; ζ'''; ζ''''; etc.

§. 14. Quodſi ergo aequationis $\Pi : \frac{\alpha}{f} = 0$ omnes radices aſſignare liceret, ex iis vtique ſolutionem tam generalem deducere poſſemus, quae ſine vllo dubio omnes plane motus, qui in fune locum habere queant, in ſe complectatur. Neque vero idcirco problema principale reſoluere liceret, quo pro ſtatu funis initiali quocunque eius motus ſecuturus requiritur; ad hoc enim neceſſe eſſet, infinitas illas conſtantes arbitrarias pro ſtatu initiali dato debite determinare, quod certe opus omnes vires analyſeos longe eſſet ſuperaturum.

§. 15. Ex formulis autem inuentis non ſolum ad quoduis tempus figura funis per applicatam y aſſignari poteſt, ſed etiam celeritas, qua quodlibet funis punctum M eodem tempore ſecundum directionem MR mouetur. Cum enim iſta celeritas ſit $(\frac{dy}{dt})$; ſufficiet, eius valorem ex prima formula natum exhibuiſſe, qui erit

$$(\tfrac{dy}{dt}) = \mathfrak{A}\sqrt{\tfrac{2g}{f}}\,\Pi : \tfrac{\alpha}{f}\,\text{cof.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}});$$

qui valor ſi prodiret poſitiuus, celeritas dextrorſum, ſin autem

autem fuerit negatiuus, finiſtrorſum erit directa. His igitur in genere definitis, accuratius inquiramus in indolem functionis charactere Π designatae, quo deinceps facilius valores litterae f inueſtigare valeamus.

De reſolutione aequationis.

$$\frac{d.\,x\,dy}{dx^2} + \frac{y}{f} = 0.$$

§. 16. Cum haec aequatio ſit differentialis ſecundi gradus, eius integrale completum duas comprehendere debet conſtantes arbitrarias. Quare cum ſupra hoc integrale ita exhibuerimus, vt eſſet $y = G\Pi : \frac{x}{f}$; littera G alteram tantum harum conſtantium ſignificat: altera igitur in ipſa functione $\Pi : x$ inuoluatur, neceſſe eſt, quae ergo iam ita determinari poſſe videtur, vt poſito $x = a$ fiat $y = 0$; ſicque ipſa quantitas f maneret indeterminata. Vnde ſequeretur, eundem funem ad omnes plane motus oſcillatorios ſimplices adaptari poſſe; quod tamen non ſolum experientiae repugnat, ſed etiam cum ipſa natura quaeſtionis conſiſtere nequit: quamobrem omni cura nobis eo eſt incumbendum, vt iſtam alteram conſtantem ex indole caſus propoſiti rite determinemus.

§. 17. Latet ergo ſine dubio in ipſa hypotheſi, qua ſumimus funem abſoluere oſcillationes regulares pendulo ſimplici, cuius longitudo $= f$, iſochronas, conditio quaepiam cum iſto ſtatu eſſentialiter connexa, cui nondum ſatisfecimus, et ex qua alteram illam conſtantem determinari oportet. Hanc autem conditionem reperiemus in ipſa particula funis extrema in F ſita, quae a funе ſecundum

Tab. IV. Fig. 5. tangentem F G retrahitur vi ipsius ponderi aequali; ideoque perinde moueri incipiet circa punctum G, ac si ibi ope fili G F esset suspensa. Quoniam igitur eius motus pendulo simplici longitudinis f conformis supponitur, necesse est, vt tangens F G, seu etiam subtangens A G longitudini penduli f sit aequalis. At vero ista subtangens exprimitur formula $= -\frac{y\,dx}{dy}$; atque hinc iam manifestum est, constantem illam ita determinari debere, vt pro puncto F, vbi $x = 0$, valor formulae $\frac{y\,dx}{dy}$ euadat $= -f$.

§. 15. Quoniam functio, quam supra per $\Pi : \frac{x}{f}$ indicauimus, ita debet determinari, vt posito $x = 0$ fiat $\frac{y\,dx}{dy} = -f$; haec conditio per indolem functionis sequenti modo repraesentari poterit. Cum sit $y = G.\Pi : \frac{x}{f}$, erit more iam plerumque recepto differentialia functionum exprimendi

$$dy = G\,\tfrac{dx}{f}\,\Pi' : \tfrac{x}{f}, \text{ hinc } \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{G}{f}\,\Pi' : \tfrac{x}{f};$$

per conditionem autem praescriptam debet esse $y = -\frac{f\,dy}{dx}$, posito scilicet $x = 0$, vnde determinatio inuenta hanc conditionem inuoluet, vt sit $\Pi : 0 = -\Pi' : 0$, cui conditioni cum fuerit satisfactum, tum demum functio $\Pi : \frac{x}{f}$ rite erit determinata, vt posito $x = a$ ex aequatione $\Pi : \frac{a}{f} = 0$ valores idonei quantitatis f elici queant.

§. 19. His praenotatis, quoniam integratio aequationis propositae vires Analyseos superare videtur, eius integrale per seriem infinitam inuestigemus. Quae operatio quo facilior reddatur, ponamus iterum $\frac{x}{f} = u$, siue $x = fu$, vt habeamus hanc aequationem resoluendam: $\frac{d.u\,dy}{du^2} + y = 0$;

et

et iam fingamus esse

$$y = \alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3 + \varepsilon u^4 + \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{dy}{du} = \beta + 2\gamma u + 3\delta uu + 4\varepsilon u^3 + \text{etc.}$$

hincque

$$\frac{udy}{du} = \beta u + 2\gamma uu + 3\delta u^3 + 4\varepsilon u^4 + \text{etc.}$$

ergo

$$\frac{d.udy}{du^2} = \beta + 4\gamma u + 9\delta u^2 + 16\varepsilon u^3 + 25\zeta u^4 + \text{etc.}$$

haec ergo series ipsi $-y$ aequalis fieri debet, vnde consequimur has determinationes:

I. $\beta = -\alpha$;

II. $4\gamma = -\beta = \alpha$, ergo $\gamma = \frac{\alpha}{4}$;

III. $9\delta = -\gamma$, ergo $\delta = -\frac{\alpha}{4.9}$;

IV. $16\varepsilon = -\delta$, ideoque $\varepsilon = \frac{\alpha}{4.9.16}$;

V. $25\zeta = -\varepsilon$, ergo $\zeta = -\frac{\alpha}{4.9.16.25}$.

Vnde series nostra ficta nunc ita erit determinata, vt sit

$$y = \alpha\left(1 - \frac{u}{1} + \frac{uu}{1.4} - \frac{u^3}{1.4.9} + \frac{u^4}{1.4.9.16} - \frac{u^5}{1.4.9.16.25} + \frac{u^6}{1.4.9.16.25.36} \text{ etc.}\right).$$

§. 20. Verum quia haec series vnam tantum constantem arbitrariam α inuolvit, etiam integrale tantum particulare nostrae aequationis refert, ex quo per methodos cognitas haud difficulter integrale completum erui posset. Sed ante quam hunc laborem suscipiamus, videamus, an istud integrale iam satisfaciat conditioni supra inuentae, quae erat $\Pi : o = -\Pi' : o$, quod enim si non contigerit, tum demum integrali completo erit opus. Loco u igitur scribamus valorem $\frac{\alpha}{f}$, fiatque

$\Pi : \frac{x}{f} = 1 - \frac{x}{f} + \frac{xx}{1.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.f^3} + \frac{x^4}{1.4.9.16.f^4}$ etc. in infinitum,

hincque

$\frac{1}{f}\Pi' : \frac{x}{f} = -\frac{1}{1.f} + \frac{2x}{1.4.f^2} - \frac{3xx}{1.4.9.f^3} + \frac{4x^3}{1.4.9.16.f^4}$ etc. in infinitum.

Iam posito $x = 0$ habebimus $\Pi : 0 = 1$ et $\Pi' : 0 = -1$. Sicque sponte satisfit conditioni praescriptae, qua fieri debet $\Pi : 0 = -\Pi' : 0$; quocirca functio nostra $\Pi : \frac{x}{f}$ iam rite est determinata, ita vt sit

$$\Pi : \frac{x}{f} = 1 - \frac{x}{1.f} + \frac{xx}{1.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.f^3} + \text{etc.}$$

sicque posito $x = \alpha$ quantitatem f definire oportebit ex hac aequatione infinita:

$$0 = 1 - \frac{\alpha}{1.f} + \frac{\alpha\alpha}{1.4.f^2} - \frac{\alpha^3}{1.4.9.f^3} + \text{etc.}$$

quae cum in infinitum porrigatur, facile intelligitur, eam infinitas comprehendere radices, prorsus vti supra iam assumsimus.

§. 21. Ne autem quis putet, ex integrali completo fortasse adhuc alias series pro nostra functione $\Pi : \frac{x}{f}$ locum habere posse; ipsum integrale completum aequationis differentio-differentialis

$$\frac{u\,ddy}{du^2} + \frac{d\,y}{d\,u} + y = 0,$$

inuestigemus, vbi scilicet loco $\frac{x}{f}$ scripsimus u. Quem in finem integrale particulare, quod modo inuenimus, ponamus $= v$, ita vt sit

$$v = y = 1 - \frac{u}{1} + \frac{uu}{1.4} - \frac{u^3}{1.4.9} + \frac{u^4}{1.4.9.16} - \text{etc.}$$

pro integrali autem completo statuamus esse $y = v\,z$; hinc ergo erit

$$dy = z\,dv + v\,dz \text{ et } ddy = z\,ddv + 2\,dv\,dz + v\,ddz,$$

qui-

quibus valoribus substitutis fiet

$$\frac{uz\,dd\,v}{du^2} + \frac{2u\,dv\,dz}{du^2} + \frac{uv\,dd\,z}{du^2} + \frac{z\,dv}{du} + \frac{v\,dz}{du} + v\,z = 0.$$

Quia vero v est integrale particulare, erit vtique

$$\frac{v\,dd\,v}{du^2} + \frac{dv}{du} + v = 0,$$

quae aequatio ducta in z et ab illa subtracta relinquet hanc aequationem:

$$\frac{2u\,dv\,dz}{du^2} + \frac{uv\,dd\,z}{du^2} + \frac{v\,dz}{du} = 0,$$

ex qua elicitur

$$\frac{dd\,z}{dz} = -\frac{du}{u} - \frac{2\,dv}{v}.$$

§. 22. Commode ergo hic vsu venit, vt perue-nerimus ad hanc aequationem per logarithmos sponte integrabilem, quandoquidem eius integrale manifesto est

$$\frac{dz}{du} = lC - lu - 2lv,$$

quae aequatio ad numeros reducta dat

$$\frac{dz}{du} = \frac{C}{uv^2}, \text{ ideoque } dz = \frac{C\,du}{uv^2},$$

vnde porro integrando colligimus $z = D + C\int \frac{du}{uv^2}$; sicque integrale completum nostrae aequationis erit

$$y = vz = Dv + Cv\int \frac{du}{uv^2},$$

quod vtique duas constantes arbitrarias C et D inuoluit; vnde si constans C sumatur euanescens, oritur integrale particulare $y = Dv$, quod est id ipsum, quod ante per se-riem expressimus.

§. 23. Inuento igitur integrali completo videa-mus, quomodo constantes C et D definiri oporteat, vt fiat $y = -\frac{f\,dy}{dx}$, posito scilicet $x = 0$. Hunc in finem loco $\frac{x}{f}$

ſcribamus u, vt ſiat $y = -\frac{dy}{du}$; quare cum ſit $y = v\,z$, oportebit eſſe

$$v\,z = -\frac{dy}{du} = -\frac{z\,dv}{du} - \frac{v\,dz}{du}$$

poſito ſcilicet $u = 0$. Quia autem eſt

$$v = 1 - \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.4} - \frac{u^3}{1.4.9} + \text{etc. erit}$$

$$dv = -\frac{du}{1} + \frac{2u\,du}{1.4} - \frac{3uu\,du}{1.4.9} + \text{etc.}$$

Hinc poſito $u = 0$ erit $v = 1$ et $dv = -du$, quibus valoribus ſubſtitutis conditio noſtra praebet $\frac{dz}{du} = 0$. Iam vero inuenimus $\frac{dz}{du} = \frac{C}{uvv}$, quae formula nihilo aequalis eſſe nequit, niſi ſit $C = 0$, ita vt integrale determinatum, quod pro noſtro inſtituto requiritur, ſit $y = Dv$; quae eſt ea ipſa functio, qua ſupra ſumus vſi; ita vt nunc certi ſimus, functionem noſtram $\Pi : \frac{x}{f}$ alium valorem habere non poſſe, niſi quem ſupra ipſi tribuimus, ſcilicet:

$$\Pi : \tfrac{x}{f} = 1 - \frac{x}{1.f} + \frac{x\,x}{1.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.f^3} + \text{etc.}$$

vnde poſito $x = a$ valores penduli ſimplicis f definiri oportet.

De reſolutione aequationis infinitae

$$0 = 1 - \frac{a}{1.f} + \frac{a^2}{1.4.f^2} - \frac{a^3}{1.4.9.f^3} + \text{etc.}$$

§. 23. Ponamus ſtatim breuitatis gratia $\frac{a}{f} = n$, vt reſoluenda proponatur haec aequatio:

$$0 = 1 - \frac{n}{1} + \frac{nn}{1.4} - \frac{n^3}{1.4.9} + \frac{n^4}{1.4.9.16} \text{ etc.}$$

vnde elici oportet omnes valores litterae n, qui huic aequationi ſatisfaciunt. Quia autem haec aequatio reuera ad gradum infinitesimum aſcendit, vires algebrae communis non-

longiſſime ſuperat, quippe quae non vltra quartum gradum extenditur; quare ſingularibus artificiis opus erit, vt ſaltem vnam duasue eius radices perſcrutemur.

§. 24. Repraeſentemus noſtram aequationem hac forma generali:

$$0 = 1 - An + Bnn - Cn^3 + Dn^4 - En^5 + \text{etc.}$$

ita vt ſit

$$A = 1;\ B = \tfrac{1}{1.4};\ C = \tfrac{1}{1.4.9};\ D = \tfrac{1}{1.4.9.16};\ \text{etc.}$$

et fingamus hanc formam aequari producto ex his infinitis factoribus ſimplicibus:

$$(1-\alpha n)(1-\beta n)(1-\gamma n)(1-\delta n)\ \text{etc. in infinitum}$$

ex quibus valores litterae n incognitae erunt

$$n = \tfrac{1}{\alpha};\ n = \tfrac{1}{\beta};\ n = \tfrac{1}{\gamma};\ n = \tfrac{1}{\delta};\ \text{etc.}$$

ita vt tota quaeſtio huc ſit reducta: quemadmodum hos coefficientes α; β; γ; δ; etc. eliciamus? Hunc in finem conſideremus hanc aequationem:

$$1 - An + Bnn - Cn^3 + Dn^4 \text{ etc.}$$
$$= (1-\alpha n)(1-\beta n)(1-\gamma n)\ \text{etc.}$$

ex qua ſumendis logarithmis fit

$$l(1 - An + Bnn - Cn^3 \text{ etc.})$$
$$= l(1-\alpha n) + l(1-\beta n) + l(1-\gamma n) + \text{etc.}$$

vnde differentiando et per dn diuidendo nanciſcimur

$$\frac{-A+2Bn-3Cnn+\text{etc.}}{1-An+Bnn-Cn^3+\text{etc.}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha n} - \frac{\beta}{1-\beta n} - \frac{\gamma}{1-\gamma n} - \text{etc.}$$

ſiue

$$\frac{A-2Bn+3Cnn-\text{etc.}}{1-An+Bnn-Cn^3+\text{etc.}} = \frac{\alpha}{1-\alpha n} + \frac{\beta}{1-\beta n} + \frac{\gamma}{1-\gamma n} + \text{etc.}$$

§. 25. Iam simplices fractiones more solito in series conuertamus, eritque

$$\frac{\alpha}{1-\alpha n} = \alpha + \alpha^2 n + \alpha^3 n n + \alpha^4 n^3 + \alpha^5 n^4 + \text{etc.}$$
$$\frac{\beta}{1-\beta n} = \beta + \beta^2 n + \beta^3 n n + \beta^4 n^3 + \text{etc.}$$
$$\frac{\gamma}{1-\gamma n} = \gamma + \gamma^2 n + \gamma^3 n n + \gamma^4 n^3 + \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

quae series quo commodius in vnam summam colligi queant, statuamus

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = \mathfrak{A},$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = \mathfrak{B},$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.} = \mathfrak{C},$$

et summa omnium istarum serierum erit

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} n + \mathfrak{C} n n + \mathfrak{D} n^3 + \mathfrak{E} n^4 + \text{etc.}$$

ita vt sit

$$\frac{A - 2Bn + 3Cnn - 4Dn^3 + \text{etc.}}{1 - An + Bnn - Cn^3 + Dn^4 - \text{etc.}} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} n + \mathfrak{C} n n + \mathfrak{D} n^3 + \mathfrak{E} n^4 + \text{etc.}$$

Multiplicemus nunc hanc seriem per denominatorem

$$1 - A n + B n n - C n^3 + \text{etc.}$$

et productum ita repraesentemus:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} + \mathfrak{B} n + \mathfrak{C} n n + \mathfrak{D} n^3 + \mathfrak{E} n^4 + \text{etc.} \\
&- A\mathfrak{A} n - A\mathfrak{B} n n - A\mathfrak{C} n^3 - A\mathfrak{D} n^4 - A\mathfrak{E} n^5 - \text{etc.} \\
&\quad + B\mathfrak{A} n n + B\mathfrak{B} n^3 + B\mathfrak{C} n^4 + B\mathfrak{D} n^5 + \text{etc.} \\
&\quad\quad - C\mathfrak{A} n^3 - C\mathfrak{B} n^4 - C\mathfrak{C} n^5 - \text{etc.} \\
&\quad\quad\quad + D\mathfrak{A} n^4 + D\mathfrak{B} n^5 + \text{etc.} \\
&\quad\quad\quad\quad - E\mathfrak{A} n^5 - \text{etc.}
\end{aligned}$$

quorum membrorum summa quia aequari debet illi numeratori:

$$A - 2Bn + 3Cnn - 4Dn^3 + 5En^4 - \text{etc.}$$

se-

ſequentes praebet determinationes:

I. $\mathfrak{A} = A$;
II. $\mathfrak{B} = A\,\mathfrak{A} - 2\,B$;
III. $\mathfrak{C} = A\,\mathfrak{B} - B\,\mathfrak{A} + 3\,C$;
IV. $\mathfrak{D} = A\,\mathfrak{C} - B\,\mathfrak{B} - C\,\mathfrak{A} - 4\,D$;
V. $\mathfrak{E} = A\,\mathfrak{D} - B\,\mathfrak{C} - C\,\mathfrak{B} - D\,\mathfrak{A} + 5\,E$;
VI. $\mathfrak{F} = A\,\mathfrak{E} - B\,\mathfrak{D} - C\,\mathfrak{C} - D\,\mathfrak{B} - E\,\mathfrak{A} - 6\,F$;
etc. etc.

§. 26. Subſtituamus nunc loco litterarum A; B; C; D; etc. ſuos valores numericos et pro litteris Germanicis $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}$; ſequentes eruemus valores:

I. $\mathfrak{A} = 1$;
II. $\mathfrak{B} = 1.1 - \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$;
III. $\mathfrak{C} = 1.\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4.3} = \frac{1}{3}$;
IV. $\mathfrak{D} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}.\frac{1}{2} + \frac{1}{36} - \frac{1}{1.4.6.2} = \frac{11}{48}$;
V. $\mathfrak{E} = \frac{11}{48} - \frac{1}{4.3} + \frac{1}{2.36} - \frac{1}{576} + \frac{1}{576.5} = \frac{19}{120}$;
VI. $\mathfrak{F} = \frac{19}{120} - \frac{1}{4}.\frac{11}{48} + \frac{1}{36}.\frac{1}{3} - \frac{1}{576}.\frac{1}{2} + \frac{1}{576.24} - \frac{1}{576.24.6} = \frac{475}{4320}$.
etc. etc.

§. 27. Quo nunc vſum harum ſummarum in definiendis radicibus α; β; γ; δ; etc. earumque maxima potiſſimum, quae ſit α, clarius doceamus, ponamus in genere

$\alpha^i + \beta^i + \gamma^i + \text{etc.} = \mathfrak{M}$ et
$\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} \text{ etc.} = \mathfrak{N}$,

atque euidens eſt, quo maior fuerit exponens i, eo magis primum terminum α^i reliquos eſſe ſuperaturum, qui adeo tandem prae primo euaneſcunt. Vnde ſi exponens i fuerit ſatis magnus, proxime erit $\alpha^i = \mathfrak{M}$ hincque $\alpha = \sqrt[i]{\mathfrak{M}}$. Reuera autem eſt $\alpha < \sqrt[i]{\mathfrak{M}}$; hinc cum ſit $n = \frac{1}{\alpha}$ erit $n > \sqrt[i]{\frac{1}{\mathfrak{M}}}$; ſcilicet

iſti valores $\sqrt[i]{\frac{1}{\mathfrak{M}}}$ continuo propius ad verum valorem litterae n accedent; quod ad caſus ſupra euolutos accommodemus in ſequenti tabella:

	Differentia.
$n > \sqrt{\frac{1}{2}} = 1,000000$	414213
$n > \sqrt[2]{\frac{1}{5}} = 1,414213$	28037
$n > \sqrt[3]{3} = 1,442250$	3064
$n > \sqrt[4]{\frac{11}{7}} = 1,445314$	410
$n > \sqrt[5]{\frac{180}{19}} = 1,445724$	61
$n > \sqrt[6]{\frac{4730}{473}} = 1,445785$	9

Hi valores tam prompte ad veritatem conuergunt, vt ex differentiis concludere liceat, verum valorem fore

$$n = 1,445795.$$

§. 28. Quemadmodum iſti valores aſcendendo ad veritatem appropinquant, ita etiam alios valores exhibere licet, qui deſcendendo ad veritatem continuo propius accedant. Cum enim ex formulis generalibus ſupra aſſumtis ſit

$$\alpha \mathfrak{M} = \alpha^{i+1} + \alpha\beta^i + \alpha\gamma^i + \text{etc.}$$

erit

$$\alpha \mathfrak{M} - \mathfrak{N} = (\alpha - \beta)\beta^i + (\alpha - \gamma)\gamma^i \text{ etc.}$$

Vnde cum ſit $\alpha > \beta$, erit $\alpha \mathfrak{M} - \mathfrak{N} > 0$, hincque $\alpha > \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}$; vnde ſequitur $n < \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$. Quare ex inuentis valoribus $\mathfrak{A}; \mathfrak{B}; \mathfrak{C}; \mathfrak{D}$ obtinebimus ſequentes approximationes:

$$n <$$

$n < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = 2,000000$	500000
$n < \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = 1,500000$	45455
$n < \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = 1,454545$	7177
$n < \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} = 1,447368$	1279
$n < \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}} = 1,446089$	213
	35
	6
	1

Hinc igitur verum valorem ipſius n non tam accurate concludere licet, quam ſupra eſt factum; vnde tuto ſtatuere poterimus $n = 1,445795$.

§. 28. Cum igitur certi ſimus eſſe $n = 1,445795$, erit $l\,n = 0,1601067$, hinc $l\,\alpha = 9,8398933$, ideoque $\alpha = 0,691661$. Hinc iam quaeramus ſingulas eius poteſtates, quae erunt

$l\,\alpha^2 = 9,6797866$ ergo $\alpha^2 = 0,478395$
$l\,\alpha^3 = 9,5196799$ - - $\alpha^3 = 0,330887$
$l\,\alpha^4 = 9,3595732$ - - $\alpha^4 = 0,228862$
$l\,\alpha^5 = 9,1994665$ - - $\alpha^5 = 0,158295$
$l\,\alpha^6 = 9,0393598$ - - $\alpha^6 = 0,109486$

§. 29. Has igitur poteſtates ipſius α aufferamus a ſummis poteſtatum omnium radicum α; β; γ; δ; etc. vt relinquantur ſummae poteſtatum reliquarum hoc modo:

$\beta + \gamma + \delta +$ etc. $= \mathfrak{A} - \alpha = 0,308339 = \mathfrak{A}'$
$\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ etc. $= \mathfrak{B} - \alpha^2 = 0,021604 = \mathfrak{B}'$
$\beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 +$ etc. $= \mathfrak{C} - \alpha^3 = 0,002446 = \mathfrak{C}'$

$\beta' +$

$$\beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \text{etc.} = \mathfrak{D} - \alpha^4 = 0,000305 = \mathfrak{D}'$$
$$\beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \text{etc.} = \mathfrak{E} - \alpha^5 = 0,000038 = \mathfrak{E}'$$
$$\beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \text{etc.} = \mathfrak{F} - \alpha^6 = 0,000005 = \mathfrak{F}'.$$

§. 30. Ex his iam valoribus ſimili modo, quo ante, appropinquando radicem β elicere licebit, cuius valores aſcendendo ita ſe habebunt:

	Differentiae.
$\beta < \sqrt[1]{\mathfrak{A}'} = 0,30833$	
	16135
$\beta < \sqrt[2]{\mathfrak{B}'} = 0,14698$	
	1224
$\beta < \sqrt[3]{\mathfrak{C}'} = 0,13473$	
	258
$\beta < \sqrt[4]{\mathfrak{D}'} = 0,13215$	
	154
$\beta < \sqrt[5]{\mathfrak{E}'} = 0,13060$	

Vltimo autem valore $\mathfrak{F}'$ vti plane non licet, quia hic valor per ſe nimis eſt incertus: ex differentiis autem concludimus, verum valorem eſſe circiter $\beta = 0,13045$; neque enim accuratius eum definire licet, ac fortaſſe hic iam non exiguus latet error; ex eo autem ſequitur fore

$$n = \tfrac{1}{\beta} = 7,6658.$$

§. 31. Quia iſte valor β non parum eſt incertus, ex eo multo minus quicquam pro ſequentibus radicibus γ; δ; ε; concludere licebit. Hactenus ergo pro longitudine penduli ſimplicis iſochroni geminum valorem ſumus adepti; maximum ſcilitet f vna cum proximo ſequenti f'. Cum enim ſit $f = \frac{\alpha}{n} = \alpha a$ et $f' = \beta a$, duo iſti valores erunt $f = 0,691661.a$ et $f' = 0,1304\,a$. Pro reli-

reliquis autem valoribus plus nobis non conſtat, quam eos continuo fore minores; neque etiam alia via ad eos valores numeri n cognoſcendos, niſi vt tentando, vti licet, quibus ſumma iſtius ſerici infinitae:

$$1 - \frac{n}{2} + \frac{n\,n}{1.4} - \frac{n^3}{1.4.6} + \text{ etc.}$$

ad nihilum redigatur, quod quidem binis caſibus inuentis euenire iam nouimus, ſcilicet

$$n = 1,445795 \text{ et } n = 7,6658.$$

Praeterea vero facto calculo concluſus eſt tertius valor $n = 18,63$; vnde fit $\gamma = 0,053$ et $f'' = 0,053.a$. Pro reliquis autem numero n adhuc multo maiores valores tribui oportebit; vnde continuo plures terminos huius ſerici computare neceſſe erit, antequam eius ſummam propemodum ſaltem cognoſcere licet.

§. 32. Hoc ipſum argumentum de oſcillationibus minimis funis libere ſuſpenſi iam olim cum illuſtr. *Bernoullio* fuſius pertractaui. Cum autem eo tempore Analyſis, quae circa functiones duarum pluriumue variabilium verſatur, adhuc prorſus eſſet incognita, ad quam tamen iſtud problema potiſſimum eſt referendum; methodus, qua tum ſum vſus, non ſatis ad naturam huius quaeſtionis accommodata videtur, quamobrem non dubitaui, iſtam quaeſtionem hic de nouo retractare, eiusque ſolutionem ex veris principiis huius quaſi nouae Analyſeos deriuare, quo clarius appareat, quantum etiamnunc in hoc negotio ob defectum Analyſeos deſideretur; quandoquidem vix vlla ſpes adhuc affulget, ſolutionem huius problematis ad eum perfectionis gradum euehendi, quo motum oſcillatorium chordarum definire licuit.

DE PERTVRBATIONE MOTVS CHORDARVM AB EARVM PONDERE ORIVNDA.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Ab omnibus Geometris, qui chordarum motus adhuc sunt perscrutati, earum proprium pondus est neglectum, quoniam plerumque prae vi tensionis est valde exiguum, vt motum plane non afficere posse videatur. Interim tamen in crassioribus chordis, ac potissimum si earum loco funes extendantur, facile intelligitur, earum motum a proprio pondere haud mediocriter perturbatum iri; quamobrem istas perturbationes aliquanto accuratius inuestigasse operae pretium videtur. Atque hic imprimis situm chordae spectari conuenit, prouti ad horizontem fuerit

erit inclinatus, vnde binos praecipuos casus hic examini subiiciam: alterum quo chordae situs est horizontalis, alterum vero quo est verticalis.

Casus prior.
pro chordis secundum directionem horizontalem extensis.

§. 2. Sit igitur recta A B horizontalis, et chorda in terminis A et B fixa, cuius longitudo vocetur A B $= a$; tum vero species chordae sit eiusmodi, vt longitudinis $= b$ pondus futurum sit $= B$. Vnde si vocemus abscissam A P $= x$, cui ipse arcus A M aequalis censeri potest, et applicatam P M $= y$, quasi infinite paruam spectandam, erit elementi M $m = dx$ pondus $= \frac{B\,dx}{b}$, qua vi in directione verticali M P deorsum sollicitatur. Tum vero sit tensio chordae in M versus A $= T$, qua ergo punctum M etiam versus P vrgetur vi $= \frac{T\,dy}{dx}$. Ex altera autem parte in directionem contrariam vrgebitur, ab eadem vi suo differentiali aucta, sicque in directione P M sursum pelletur vi $= d.\frac{T\,dy}{dx}$, ita vt, subtracto pondere, pro hac directione maneat vis $= d.\frac{T\,dy}{dx} - \frac{B\,dx}{b}$, quae per massam elementi M $m = \frac{B\,dx}{b}$ diuisa praebet vim acceleratricem secundum directionem P M $= \frac{b}{B\,dx}\,d.\frac{T\,dy}{dx} - 1$. Iam quia tensio T a directione horizontali nihil discrepat, ob pondus elementi M m nullum accipiet augmentum; vnde ipsa tensio T erit constans, ipsique vi, qua chorda tenditur, aequalis; ex quo vis acceleratrix fit $\frac{T\,b\,ddy}{B\,dx^2} - 1$, sumto scilicet elemento dx constante. Tab. V. Fig. 1.

§. 3. Conſideretur nunc applicata y tanquam functio binarum variabilium, ſcilicet abſciſſae x et temporis $= t$; hincque pro motu puncti M, qui, vti conſtat, fit in ipſa directione P M, ſumta x pro conſtante, celeritas eius ſecundum directionem P M erit $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, hincque acceleratio $= \frac{ddy}{dt^2}$, quae per $2g$ diuiſa (denotante g altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo), praebet vim acceleratricem $= \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$; quae ergo vi acceleratrici ante inuentae aequalis eſt ſtatuenda, vnde reſultat iſta aequatio:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Tb}{B}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) - 1,$$

ſiue poſito breuitatis gratia $\frac{2g\,Tb}{B} = cc$, erit

$$\frac{ddy}{dt^2} = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) - 2g.$$

§. 4. Haec aequatio ab illa, quae vulgo pro motu chordarum inuenitur, in eo tantum diſcrepat, quod hic inſuper reperitur terminus $-2g$. Facile autem haec aequatio ad formam priorem reduci poterit, ponendo $y = X + z$, denotante X certam functionem ipſius x, vnde erit

$$\frac{ddy}{dt^2} = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) \text{ et } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddX}{dx^2} + \left(\frac{ddz}{dx^2}\right),$$

vnde habebimus

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = cc\frac{ddX}{dx^2} + cc\frac{ddz}{dx^2} - 2g.$$

Nunc igitur fiat $cc\frac{ddX}{dx^2} - 2g = 0$, quae aequatio praebet:

$$X = \frac{\xi x x + \alpha x + \beta}{cc},$$

ita vt iam ſit

$$y = \frac{\xi x x + \alpha x + \beta}{cc} + z,$$

et quantitas z nunc determinari debet ex hac aequatione:

$$\frac{ddz}{dt^2} = cc\left(\frac{ddz}{dx^2}\right),$$

cuius

cuius integrale completum nouimus esse:

$$z = \Gamma : (c\,t + x) - \Delta\,(c\,t - x),$$

quocirca pro nostro casu habebimus hanc aequationem:

$$y = \frac{g\,x\,x + \alpha\,x + \beta}{c\,c} + \Gamma : (c\,t + x) - \Delta : (c\,t - x),$$

vbi characteres Γ et Δ repraesentant functiones quascunque arbitrarias.

§. 5. Nunc ante omnia efficiendum est, vt pro vtroque chordae termino, hoc est tam pro $x = 0$ quam pro $x = a$, applicata y euanescat; quae conditio primo adimpleatur in formula $\frac{g\,x\,x + \alpha\,x + \beta}{c\,c}$, vnde esse debet $\beta = 0$ et $\alpha = -g\,a$, hincque ipsa haec formula erit $-\frac{g\,x\,(a - x)}{c\,c}$. Pro functionibus autem, posito $x = 0$, fieri debet $\Gamma : c\,t - \Delta : c\,t = 0$, sicque functio Δ cum functione Γ congruere debet, ita vt hactenus habeamus hunc valorem:

$$y = -\frac{g\,x\,(a - x)}{c\,c} + \Gamma : (c\,t + x) - \Gamma : (c\,t - x).$$

At vero hic insuper requiritur, vt facto $x = a$ fiat

$$\Gamma : (c\,t + a) = \Gamma : (c\,t - a),$$

siue in genere $\Gamma : (p + 2\,a) = \Gamma : p$; vnde patet, scalam huius functionis ita esse debere comparatam, vt omnibus absciſſis

$$p,\ p + 2\,a,\ p + 4\,a,\ p + 6\,a,\ \text{etc.}$$

quin etiam negatiuis:

$$p - 2\,a,\ p - 4\,a,\ p - 6\,a,$$

applicatae aequales respondeant.

§. 6. Pro ſtatu igitur initiali, vbi $t = 0$, erat

$$y = -\frac{g\,x\,(a-x)}{c\,c} + \Gamma : x - \Gamma : (-x).$$

Ponamus elapſum eſſe tempus $t = \frac{\pi a}{c}$, vt ſit $c\,t = \pi a$, at tum erit applicata

$$y = -\frac{g\,x\,(a-x)}{c\,c} + \Gamma : (\pi a + x) - \Gamma : (\pi a - x),$$

quae expreſſio cum praecedente prorſus conuenit, ita vt, elapſo tempore $t = \frac{2\pi a}{c}$, chorda in eundem plane ſitum reuertatur; vnde apparet, tempus vnius vibrationis fore $= \frac{\pi a}{c}$, prorſus vti neglecta grauitate inuenimus, ita vt proprium chordae pondus hoc caſu motum vibratorium non perturbet.

§. 7. Diſcrimen autem deprehendemus in ſtatu aequilibrii, qui oritur reiectis functionibus; tum enim erit $y = -\frac{g\,x\,(a-x)}{c\,c}$, cum neglecta grauitate foret $y = 0$. Patet igitur, hoc caſu ſtatum aequilibrii non in ipſam rectam horizontalem A B incidere, ſed ab ea deorſum declinare. Chorda ſcilicet capiet figuram curuae catenariae A N B, quam nouimus in ſtatu ſummae tenſionis conuenire cum parabola hac aequatione: $y = -\frac{g\,x\,(a-x)}{c\,c}$, expreſſa. Hinc igitur haud difficulter intelligimus, hoc caſu chordam circa iſtum ſtatum aequilibrii A N B, vtrinque excurſiones abſoluere, perinde ac chordae vulgares circa ipſam rectam A B. Quo obſeruato omnia reliqua Phaenomena non discrepabunt, quae circa chordas, neglecta grauitate, deſcripſimus.

Tab V, Fig. 2.

Caſus

Casus posterior pro chordis secundum directionem verticalem extensis.

§. 8. Sit igitur recta verticalis $AB = a$, quae simul statum chordae naturalem referat, cuius pondus foret B, si longitudo esset b. Quod si iam vt ante abscissae $AP = x$ respondeat applicata $PM = y$, elementi $Mm = dx$, pondusculum erit $\frac{B\,dx}{b}$. Hinc si tensio in M ponatur $= T$, et in $m = T + dT$, punctum M in directione PM vt ante sollicitabitur vi $= d.\frac{T\,dy}{dx}$, quae per massulam $\frac{B\,dx}{b}$ diuisa dat vim acceleratricem $= \frac{b}{B\,dx}\,d.\frac{T\,dy}{dx}$. Iam quia elementum Mm ob grauitatem deorsum vrgetur secundum MQ, vi $= \frac{B\,dx}{b}$, ab ea tensio T tantum accipere debet incrementum, vt sit $dT = \frac{B\,dx}{b}$; quo valore substituto erit Tab V. Fig. 1.

$$d.\frac{T\,dy}{dx} = \frac{T\,ddy}{dx} + \frac{B\,dx}{b}\cdot\frac{dy}{dx},$$

ita vt nunc vis acceleratrix sit

$$\frac{bT}{B}\cdot\frac{ddy}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.$$

At quia $dT = \frac{B\,dx}{b}$, erit $T = \frac{Bx}{b} + C$, vnde in ipso puncto A prodit tensio $= C$; quare, si chordam a pondere appenso C tendi ponamus, erit vis acceleratrix

$$\left(\frac{Cb}{B} + x\right)\frac{ddy}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.$$

§. 9. Spectemus nunc applicatam y vt functionem duarum variabilium x et temporis t, et quia puncti M celeritas in directione PM est $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, erit vis acceleratrix $= \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, quae vi acceleratrici modo inuentae aequalis posita

posita praebet aequationem pro motu huius chordae

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{d\,dy}{dt^2}\right) = \left(\frac{Cb}{B} + x\right)\left(\frac{d\,dy}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right),$$

ad quam commodius referendam faciamus $\frac{Cb}{B} = c$, ita vt c exhibeat longitudinem chordae, cuius pondus aequale foret ponderi appenso C; hocque modo habebitur:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{d\,dy}{dt^2}\right) = (c + x)\left(\frac{d\,dy}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Haec autem aequatio longe aliter est comparata quam casu praecedente, quoniam eius integrale nullo adhuc modo erui potuit, quam ob causam etiam non licet solutionem generalem exhibere, quemadmodum casu praecedente successit. Sicque ad solutiones particulares confugere iumus coacti, quandoquidem iam constat, ex pluribus aequationibus particularibus solutionem quasi generalem concinnari posse.

§. 10. Hunc in finem quaeramus casus, quibus oscillationes nostrae chordae motui pendulii simplicis fiant conformes. Denotet igitur f longitudinem talis pendulii simplicis, fierique debebit $\frac{1}{2g}\left(\frac{d\,dy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{f}$, cuius integrale completum nouimus esse

$$y = \mathrm{F}\,\mathrm{sin.}\,(\alpha + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}}),$$

vbi, quia hic variabilis x pro constante est habita, litera F functionem quamcunque ipsius x designare debet.

§. 11. Cum igitur posuerimus

$\frac{1}{2g}\left(\frac{d\,dy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{f}$, erit etiam

$(c + x)\left(\frac{d\,dy}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{y}{f}$

quae aequatio, quo facilius tractari possit, faciamus $x = fw$, vt

beamus

$$\left(\frac{c}{f}+u\right)\left(\frac{d\,dy}{du^2}\right)+\left(\frac{dy}{du}\right)+y=0,$$

vbi porro faciamus $\frac{c}{f}=n$, vt fiat

$$(n+u)\left(\frac{d\,dy}{du^2}\right)+\left(\frac{dy}{du}\right)+y=0$$

et si porro statuamus $n+u=s$, aequatio nostra contrahetur in hanc formam:

$$\frac{s\,d\,dy}{ds^2}+\frac{dy}{ds}+y=0, \text{ siue}$$

$$d.\frac{s\,dy}{ds^2}+y=0,$$

vnde f aequabitur certae cuipiam functioni ipsius s, existente $s=\frac{c+x}{f}$.

§. 12. Verum etiam ista aequatio ita est comparata, vt nullo modo adhuc integrari potuerit, vnde eius integrale per seriem inuestigare sumus coacti; quem in finem ponamus esse:

$$y=A+Bs+Css+Ds^3+Es^4+\text{ etc.}$$

eritque

$$\frac{s\,dy}{ds}=Bs+2Css+3Ds^3+4Es^4+5Fs^5+\text{ etc.}$$

hincque

$$d.\frac{s\,dy}{ds^2}=B+4Cs+9Dss+16Es^3+25Fs^4+\text{ etc.}$$

quae series ipsi $-y$ aequalis reddita praebet has determinationes:

$$B=-A;\ C=\frac{A}{1.4};\ D=-\frac{A}{1.4.9};\ E=\frac{A}{1.4.9.16};\ \text{etc.}$$

ita vt iam habeamus:

$$y=A\left(1-\frac{s}{1}+\frac{ss}{1.4}-\frac{s^3}{1.4.9}+\frac{s^4}{1.4.9.16}-\frac{s^5}{1.\ldots.25}+\text{etc.}\right.$$

§. 13. Verum iſte valor literae y, quia tantum vnicam conſtantem arbitrariam A inuoluit, tantum pro integrali particulari haberi poteſt; interim tamen facile eſt ex hoc ipſo valore particulari integrale completum elicere, id quod ſequenti modo praeſtabitur. Ponamus eſſe

$$v = 1 - \frac{s}{1} + \frac{ss}{1.4} - \frac{s^3}{1.4.9} + \frac{s^4}{1.4.9.16} - \frac{s^5}{1.\ldots.25} + \text{etc.}$$

ita vt ſit

$$d.\frac{sdv}{ds} + v = 0, \text{ ſiue } \frac{sddv}{ds^2} + \frac{dv}{ds} + v = 0,$$

et pro integrali completo inueniendo ſtatuamus $y = vz$, eritque

$$dy = vdz + zdv \text{ et } ddy = vddz + dvdz - zddv,$$

qui valores in noſtra aequatione euoluta

$$\frac{sddy}{ds} + \frac{dy}{ds} + y = 0$$

ſubſtituti producent hanc aequationem:

$$\frac{vsddz + 2sdvdz + szddv}{ds} + \frac{vdz + zdv}{ds} + vz = 0,$$

a qua ſi prior aequatio

$$\frac{sddv}{ds} + \frac{dv}{ds} + v = 0$$

per z multiplicata ſubtrahatur, relinquetur illa:

$$\frac{svddz + 2sdvdz}{ds} + \frac{vdz}{ds} = 0,$$

ex qua ſtatim elicimus

$$\frac{ddz}{dz} = -\frac{2dv}{v} - \frac{ds}{s},$$

cuius integrale eſt

$$l\frac{dz}{ds} = -2lv - ls + lD, \text{ ſiue}$$

$\frac{dz}{ds} = \frac{D}{svv}$, ita vt ſit $z = D\int\frac{ds}{svv} + E$.

§. 14.

§. 14. Quare cum posuerimus $y = vz$, consecuti sumus integrale completum

$$y = \mathrm{D}\,v\int\frac{ds}{sVv} + \mathrm{E}\,v,$$

quod duas inuoluit constantes arbitrarias D et E, quarum altera ita debet determinari, vt posito $x = 0$, siue $s = \frac{c}{f}$ fiat $y = 0$; quo facto insuper efficiendum est, vt posito $x = a$ fiat itidem $y = 0$; at vero posito $s = \frac{c}{f}$ fit

$$v = 1 - \frac{c}{f} + \frac{cc}{1.4ff} - \frac{c^3}{1.4.9.f^3} + \frac{c^4}{1.4.9.16\,f^4} - \text{ etc.}$$

Verum quemnam valorem formula integralis $\int\frac{ds}{sVv}$ hoc casu $s = \frac{c}{f}$ fit adeptura, nullo modo patet; quocirca denuo ad series infinitas erit confugiendum, vbi totum negotium huc redit, vt integrale completum nostrae aequationis per series infinitas euoluamus, ita vt nulla amplius formula integralis occurrat. Verum in hoc ipso noua difficultas deprehenditur, quoniam praeter seriem iam inuentam nullae aliae aequationi satisfacere posse videtur.

§. 15. Quod si hanc circumstantiam attentius perpendamus, reperiemus nostram aequationem ad illud genus pertinere, de quo in *Calculo Integrali* ostendi, integrale completum aliter per series exprimi non posse, nisi ponatur $y = p + qls$, ita vt binae series pro p et q sint inuestigandae, quarum posterior per ls sit affecta. Hoc posito erit

$$dy = dp + \frac{q\,ds}{s} + dqls \text{ et}$$

$$ddy = ddp + \frac{2\,dq\,ds}{s} - \frac{b\,ds^2}{ss} + ddqls.$$

Hic scilicet duplicis generis termini occurrunt, quorum alteri a logarithmo sunt liberi, alteri vero per ls affecti,

quos feorſim in aequatione noſtra

$$\frac{s\,d\,d\,\gamma}{d\,s^2} + \frac{d\,\gamma}{ds} + \gamma = 0$$

ſubſtituamus, vnde duae reſultabunt aequationes ſequentes:

$$\frac{s\,d\,d\,p}{d\,s^2} + \frac{2\,d\,q}{ds} + \frac{d\,p}{ds} + p = 0,$$
$$\frac{s\,d\,d\,q}{d\,s^2} + \frac{d\,p}{ds} + q = 0.$$

§. 16. Quia poſterior aequatio ab ea non diſcrepat, cuius integrale particulare iam ſupra per ſeriem euolvimus, erit etiam hic

$$q = A\left(1 - \frac{s}{1} + \frac{ss}{1.4} - \frac{s^3}{1.4.9} + \frac{s^4}{1\ldots16} - \text{etc.}\right)$$

quare pro p ſtatuamus hanc ſeriem:

$$p = \alpha + \beta s + \gamma ss + \delta s^3 + \varepsilon s^4 + \zeta s^5 + \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{dp}{ds} = \beta + 2\gamma s + 3\delta s^2 + 4\varepsilon s^3 + 5\zeta s^4 + \text{etc. et}$$
$$\frac{d\,d\,p}{d\,s^2} = 2\gamma + 2.3\delta s + 3.4\varepsilon ss + 4.5\zeta s^3 + 5.6\eta s^4 + \text{etc.}$$

praeterea vero erit

$$\frac{dq}{ds} = -\frac{A}{1} + \frac{2As}{1.4} - \frac{3Ass}{1.4.9} + \frac{4As^3}{1\ldots16} - \text{etc.}$$

Hos igitur valores ordine ſubſtituamus, vt ſequitur:

$$\frac{s\,d\,d\,p}{d\,s^2} = 2\gamma s + 2.3\delta ss + 3.4\varepsilon s^3 + 4.5\zeta s^4 + 5.6\eta s^5 \text{ etc.}$$
$$+\frac{dp}{ds} = \beta + 2\gamma s + 3\delta ss + 4\varepsilon s^3 + 5\zeta s^4 + 6\eta s^5 \text{ etc.}$$
$$+ p = \alpha + \beta s + \gamma ss + \delta s^3 + \varepsilon s^4 + \zeta s^5 \text{ etc.}$$
$$+\frac{2dq}{ds} = -\frac{2A}{1} + \frac{2As}{1.4} - \frac{6Ass}{1.4.9} + \frac{8As^3}{1.4.9.16} - \frac{10As^4}{1\ldots25} + \frac{12As^5}{1\ldots36} \text{ etc.}$$

§. 17. Quia igitur omnes hae ſeries iunctim ſumtae nihilo debent eſſe aequales, inde ſequentes adipiſcimur determinationes:

$$\beta = \frac{2A}{1} - \alpha$$
$$\gamma = -\frac{4A}{1.4.4} - \frac{\beta}{4} \qquad \delta =$$

$$\delta = \frac{6\,A}{1.4.9.9} - \frac{\gamma}{9}$$
$$\varepsilon = -\frac{8\,A}{1.4.9.16.16} - \frac{\delta}{16}$$
$$\zeta = \frac{10\,A}{1.\ldots.25.25} - \frac{\varepsilon}{25}$$
etc. etc.

fiue fubſtituendo praecedentes valores habebimus:

$$\alpha = \alpha$$
$$\beta = \frac{2\,A}{1} - \alpha$$
$$\gamma = -\frac{4\,A}{1.4.4} - \frac{2\,A}{1.4} + \frac{\alpha}{1.4}$$
$$\delta = \frac{6\,A}{1.4.9.9} + \frac{4\,A}{1.4.4.9} + \frac{2\,A}{1.4.9} - \frac{\alpha}{1.4.9}$$
$$\varepsilon = \frac{8\,A}{1.4.9.16.16} - \frac{6\,A}{1.4.9.9.16} - \frac{4\,A}{1.4.4.9.16} - \frac{2\,A}{1.4.9.16} + \frac{\alpha}{1.4.9.16}.$$

§ 18. Hinc igitur patet, ſingularum literarum β, γ, δ, ε, etc. valores duabus conſiſtere partibus, altera per A affecta, altera per α: vnde breuitatis gratia ponamus:

$$\beta = A\,\mathfrak{B} - \alpha;\quad \gamma = A\,\mathfrak{C} + \frac{\alpha}{1.4};$$
$$\delta = A\,\mathfrak{D} - \frac{\alpha}{1.4.9};\quad \varepsilon = A\,\mathfrak{E} + \frac{\alpha}{1.4.9.16};\ \text{etc.}$$

ita vt ſit

$$\mathfrak{B} = \frac{2}{1};$$
$$\mathfrak{C} = -\frac{4}{1.4.4} - \frac{2}{1.4};$$
$$\mathfrak{D} = \frac{6}{1.4.9.9} + \frac{4}{1.4.4.9} + \frac{2}{1.4.9};$$
$$\mathfrak{E} = -\frac{8}{1.4.9.16.16} - \frac{6}{1.4.9.9.16} - \frac{4}{1.4.4.9.16} - \frac{2}{1.4.9.16};$$
etc. etc.

atque nunc habebimus

$$p = \alpha\,(1 - \tfrac{s}{2} + \tfrac{ss}{1.4} - \tfrac{s^3}{1.4.9} + \tfrac{s^4}{1.4.9.16} - \text{etc.})$$
$$+ A\,(\mathfrak{B}s + \mathfrak{C}ss + \mathfrak{D}s^3 + \mathfrak{E}s^4 + \text{etc.})$$

exiſtente

$$q = A\,(1 - \tfrac{s}{2} + \tfrac{ss}{1.4} - \tfrac{s^3}{1.4.9} + \tfrac{s^4}{1.4.9.16} - \text{etc.})$$

vnde colligimus noſtrum integrale completum:

$$y = (\alpha + A\,l\,s)\left(1 - \frac{s}{1} + \frac{ss}{1.4} - \frac{s^3}{1.4.9} + \frac{s^4}{1.4.9.16} - \frac{s^5}{1.\ldots.25} + \text{etc.}\right)$$
$$+ A\left(\mathfrak{B}s + \mathfrak{C}ss + \mathfrak{D}s^3 + \mathfrak{E}s^4 + \mathfrak{F}s^5 + \text{etc.}\right)$$

vbi A et α ſunt binae conſtantes arbitrariae.

§. 19. Primum igitur iſtae conſtantes ita debent definiri, vt poſito $x = 0$, ſiue $s = \frac{c}{f}$, fiat $y = 0$, ſicque habebitur:

$$0 = (\alpha + A\,l\,\tfrac{c}{f})\left(1 - \frac{c}{f} + \frac{cc}{1.4\,ff} - \frac{c^3}{1.4.9\,f^3} + \frac{c^4}{1.\ldots.16\,f^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+ A\left(\frac{\mathfrak{B}c}{f} + \frac{\mathfrak{C}cc}{ff} + \frac{\mathfrak{D}c^3}{f^3} + \frac{\mathfrak{E}c^4}{f^4} + \frac{\mathfrak{F}c^5}{f^5} + \text{etc.}\right.$$

vnde litera α per A definiri poteſt. Deinde vero poni debet $x = a$, ſiue $s = \frac{c+a}{f}$, ac valor pro y reſultans denuo debet euaneſcere; tum vero omnes termini per A diuiſi praebebunt aequationem, ex qua longitudinem penduli ſimplicis f inueſtigari oportet, cuius nullum eſt dubium quin infiniti dentur valores reales, quorum quilibet oſcillatorium motum regularem exhibebit. Tum vero iam ſatis ſuperque eſt oſtenſum, quemadmodum ex pluribus motibus ſimplicibus infiniti alii motus compoſiti aſſignari queant; quamobrem, quia hinc nihil amplius definire licet, huic argumento fuſius non immoramur.

METHO-

METHODVS EXACTIOR DECLINATIONEM ACVS MAGNETICAE OBSERVANDI.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKI

§. 1.

In obſeruanda Declinatione Acus magneticae plerumque contenti fuerunt Phyſici exactitudine dimidii gradus, vel raro ad vnam quartam partem illius pertingere ſatis ſibi hucusque habuerunt. Primo quidem intuitu credere licet facile hic quantumuis gradum praeciſionis obtineri poſſe, dummodo ſufficiens longitudo Acui magneticae tribuatur; verum longitudini illius terminum ponere videtur ipſa magnetismi natura. Obſeruatum enim eſt, adhibita etiamnum methodo duplicis contactus, ſi longior lamina chalybea vi magnetica imbuatur, eam vt plurimum non duobus punctis magneticis, ſed pluribus, vt vocant, conſequentibus praeditam euadere, quae niſi in vna eademque linea ſita ſint, Acus declinatoria pigra ſit neceſſe eſt; hinc ſit

vt

vt laminae ad Acus magneticas conficiendas non longiores 6 aut 8 rarius vero 12 polli cumeligantur.

§. 2. Cogitanti mihi de modo maiori cum praecisione Declinationem Acus magneticae obseruandi non obstante brevitate illius, venit in mentem methodus, etsi operosior ordinaria, scopo tamen huic obtinendo non prorsus inidonea; et cum exactior cognitio Declinationis Acus magneticae aliquam vtilitatem adferre posse videatur, methodum, cuius ope ad eam peruenire licet, Illustrissimae academiae scientiarum iudicio submittere non dubitaui.

§ 3. In camera obscura suspendatur Acus declinatoria ex filo serico tenui non intorto, ac in plano horizontali, cui acus magnetica imminet, ope filorum ponduculis onustorum, polosque illius tangentium designetur capillo positio acus; in latere camerae obscurae meridiem spectante et apertura instructo applicetur lamina ferrea rotundo foramine pertusa, vt illud exacte immineat directioni acus magneticae. Operatio ista prorsus conuenit cum ea, quam adhibent Astronomi, dum in obseruatorio ducunt lineam meridianam. Intromissis per foramen laminae ferreae radiis solaribus obseruetur ad horologium, cuius motus perspectus sit necesse est, appulsus vtriusque marginis imaginis Solis ad capillum positionem Acus magneticae designantem, siue ad alterum filorum cuspides illius tangentium, vt habeatur momentum appulsus centri Solis ad planum verticale per Acum declinatoriam transiens. Differentia inter hoc momentum, momentumque horologii in quod meridies incidit, dabit angulum ad polum, quo planum per polum mundi centrumque Solis transiens, differt a plano meridiani.

§. 4.

§. 4. Repraeſentet nunc H Z N meridianum loci, H M N horizontem, S locum Solis, Z S M verticalem, in quo Sol verſabatur momento appulſus centri illius ad lineam poſitionem acus declinatoriae deſignantem, O S R parallelum, quem Sol eo temporis deſcribit. Per centrum Solis S et polum P concipiatur ductus circulus P S, angulus Z P S erit angulus horarius per obſeruationem inuentus, et angulus M Z N exprimet declinationem Acus magneticae. In triangulo igitur ſphaerico Z P S, vbi P Z eſt diſtantia poli a Zenith, et P S complementum declinationis Solis, datis ang. Z P S $= A$, P Z $= b$ et P S $= c$ habebitur

Tab V. Fig. 4.

$$\text{tang. P Z S} = \text{tang. } \omega = \frac{\text{ſin. A tang. } c}{\text{ſin. } b - \text{tang. } c \text{ coſ. } b \text{ coſ. A}}.$$

§. 5. Ex hac formula liquet, ſi Sol tempore obſeruationis verſetur in aequatore, fore tang. P Z S $= -\frac{\text{tang. A}}{\text{coſ. } b}$, Quodſi locus obſeruatoris ſit ſub aequatore, tangens ipſius declinationis Acus magneticae prodit $=$ ſin. A tang. c. Pro aliis obſeruatoris et Solis poſitionibus, vt computus facilius inſtitui queat, quaeratur angulos u talis, vt ſit

$$\text{tang. } u = \text{tang. } c \text{ coſ. A}$$

et habebitur

$$\text{tang. } \omega = \frac{\text{ſin. A tang. } c \text{ coſ. } u}{\text{ſin. } (b-u)} = \frac{\text{tang. A ſin. } u}{\text{ſin. } (b-u)}.$$

Sit Latitudo loci 60°; declinatio Solis 23°. 28′ vtraque borealis, angulus horarius ex obſeruatione deductus A $=$ 3° habebitur $b = 30°$ et $c = 66°.\ 32'$, ac

$$\begin{aligned} l \text{ coſ. A} &= 9,9994044 \\ l \text{ tang. } c &= 10,3623894 \\ \hline l \text{ tang. } u &= 10,3618938 \end{aligned}$$

hinc

$$u = 66°.\,30'.\,16''\ \text{et}\ b - u = -36°.\,30'.\,16''.$$

Porro

$$l\,\text{tang. A} = 8,7193958$$
$$l\,\text{fin. } u = 9,9624124$$
$$8,6818082$$
$$l\,\text{fin. } (b-u) = 9,7744331$$
$$l\,\text{tang. } \omega = 8,9073751$$

Vnde declinatio Acus magneticae reperitur $4°.\,37'.\,8''$.

§. 6. Cognita igitur Latitudine loci et declinatione Solis determinatio declinationis Acus magneticae pendebit a praecisione, quacum appulsus marginum imaginis Solis ad capillum positionem Acus designantem obseruabuntur, qui teste experientia, si Acus quiescat, ad duo secunda exacte obseruari possunt. Hinc concludere licet, quanta exactitudo ab hac methode in exquirenda declinatione Acus magneticae sit expectanda. Vt in genere appareat, quantus error in declinationem Acus magneticae redundet ab errore minimo in obseruatione commisso differentietur aequatio

$$\text{tang. } \omega = \frac{\text{fin. A tang. c}}{\text{fin. b} - \text{tang. c cos. b cos. A}},$$

spectatis ω et A variabilibus; et prodibit error in declinationem acus redundans ab errore dA in obseruatione commisso. In exemplo superius allato, si error in obseruatione commissus sit $4''$, vt dA sit $= 6^{c\prime\prime}$ quo vix maior committi potest, calculo peracto reperitur $d\omega = -1'.\,36''$.

§. 7.

§. 7. Ad obſeruationem huiusmodi commodius perficiendam varia excogitari poſſunt adminicula, verum iis imminorari ſuperuacaneum duco, et cuiae potius intelligentium artificum illa relinquenda exiſtimo. Non praeter eundum tamen videtur illud commodum ex hac methodo reſultans, quod acus declinatoria hic adhibenda non egeat capitulo pondus illius augente, et per medium perforatione mutationem fortaſſe aliquam in actione vis magneticae afferente. Id tantum in methodo hac deſiderari videtur, quod non niſi coelo ſereno et circa meridiem in vſum vocari queat; aſt vnam obſeruationem maioris praeciſionis capacem praeferendam eſſe exiſtimo pluribus requiſitam exactitudinem reſpuentibus.

SOLVTIO
PROBLEMATIS MECHANICI.

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

In Actis Academiae Scientiarum ad annum 1778, Illustris *Eulerus* binis dissertationibus quaestionem agitauit de motu corporis plano horizontali politissimo incumbentis et ad punctum fixum ope fili alligati; vbi quidem in posteriori istarum Dissertationum ad simplicem valde ac concinnam huius Problematis solutionem peruenit. Mihi de eodem Problemate meditanti, quum nonnullae solutiones vt spero aeque concinnae se obtulerint, earum adumbrationem Geometris hic offerre non dubito.

Tab. V. Fig. 5. §. 2. Sit corpus B E de puncto B, ad punctum A fixum, ope fili A B alligatum, si per A ducatur linea recta A M, ad quam motus et situs corporis B E quouis temporis momento referatur, quod fiet ex centro inertiae C corporis B E demittendo in A M perpendicularem C M, tum producatur linea C B vsque dum ipsi A M in N occur-

currat et iungatur A C; facile liquet hac facta constructione, Problematis solutionem eo redire vt pro quouis temporis momento assignari queat recta A C et angulus M A C. Hunc in finem designemus rectas A M, M C, A C respective per litteras x, y, v; angulos vero M A B, M A C, M N B per Φ, θ, ψ, rectae vero inuariabiles A B, B C sint a, b.

§. 3. Si vis qua filum A B tenditur, exprimatur per T, constat si haec vis ad ipsum centrum inertiae C adplicata concipiatur, eam secundum directiones coordinatarum A M, M C ita resolui, vt illa secundum directionem M A agens habeatur $= T \cos. \Phi$, ista vero secundum directionem C M $= T \sin. \Phi$, hinc si corporis massa exprimatur per M, has binas consequemur aequationes differentio-differentiales:

$$\frac{d\,d\,x}{\alpha\,d\,t^2} = -\frac{T\cos.\Phi}{M}; \quad \frac{d\,d\,y}{\alpha\,d\,t^2} = -\frac{T\sin.\Phi}{M};$$

designante $d\,t$ elementum temporis quod inuariabile assumitur. Tum vero quia praeter motum progressiuum centri inertiae C, etiam huic in censum venire debet motus rotatorius istius centri circa punctum B, de quo corpus alligatum habetur; si momentum inertiae corporis statuatur $M\,c\,c$, ex principiis Mechanicis colligetur momentum quod tensio fili T exserit pro rotatione centri inertiae C circa B, $\frac{b\,T\sin.(\psi-\Phi)}{M\,c\,c}$. Hinc igitur tertiam istam obtinemus aequationem differentio-differentialem:

$$\frac{d\,d\,\psi}{\alpha\,d\,t^2} = -\frac{b\,T\sin.(\psi-\Phi)}{M\,c\,c}.$$

§. 4. Quia igitur est $x = a \cos. \Phi + b \cos. \psi$, et $y = a \sin. \Phi + b \sin. \psi$, multiplicato $d\,d\,x$ per y et $d\,d\,y$

per x, sumtaque productorum differentia, habebimus:

$$\frac{x\,d\,dy - y\,d\,dx}{\alpha\,dt^2} = \frac{b\,\mathrm{T}\,\mathrm{sin.}\,(\psi - \Phi)}{\mathrm{M}},$$

vnde colligimus

$$\frac{x\,d\,dy - y\,d\,dx + cc\,d\,d\psi}{\alpha\,dt^2} = 0,$$

ex quo integrando statim prodit:

$$\frac{x\,dy - y\,dx + cc\,d\psi}{\alpha\,dt} = \mathrm{L}.$$

Deinde quum sit

$$dx = -a\,d\,\Phi\,\mathrm{sin.}\,\Phi - b\,d\,\psi\,\mathrm{sin.}\,\psi, \text{ et}$$
$$dy = a\,d\,\Phi\,\mathrm{cos.}\,\Phi + b\,d\,\psi\,\mathrm{cos.}\,\psi,$$

prodibit

$$\frac{dx\,d\,dx + dy\,d\,dy}{\alpha\,dt^2} = \frac{b\,\mathrm{T}\,d\,\psi\,\mathrm{sin.}\,(\psi - \Phi)}{\mathrm{M}},$$

vnde colligitur

$$\frac{d\,x\,d\,dx + dy\,d\,dy + cc\,d\psi\,d\,d\psi}{\alpha\,dt^2} = 0;$$

quae formula integrata praebet

$$\frac{dx^2 + dy^2 + cc\,d\psi^2}{\alpha\,dt^2} = \mathrm{N}.$$

§. 5. Sic igitur facillima omnino ratione ad binas perducti sumus aequationes differentiales primi gradus, ex quibus nunc restat vt valores rectae $\mathrm{A\,C} = v$ et anguli $\mathrm{M\,A\,C} = \theta$, inuestigemus. Et quum fuerit

$$\mathrm{tang.}\,\theta = \frac{y}{x}, \text{ fiet } \frac{d\,\theta}{\mathrm{cos.}\,\theta^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2},$$

ex quo ob $v^2\,\mathrm{cos.}\,\theta^2 = x^2$, prodit $v^2\,d\,\theta = x\,dy - y\,dx$, tum vero ob

$$dy = d\,v\,\mathrm{sin.}\,\theta + v\,d\,\theta\,\mathrm{cos.}\,\theta;$$
$$dx = d\,v\,\mathrm{cos.}\,\theta - v\,d\,\theta\,\mathrm{sin.}\,\theta; \text{ erit}$$
$$dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2\,d\,\theta^2,$$

hinc-

hinc̃que factis ſubſtitutionibus iſtas habebimus aequationes:

$$\frac{v^2 d\theta + cc\, d\psi}{\alpha dt} = L\,; \quad \frac{dv^2 + v^2 d\theta^2 + cc d\psi^2}{\alpha dt^2} = N.$$

De priori harum aequationum obſeruare conuenit, quod deriuetur ex proprietate, quae in motibus corporum ſaepius locum habet et qua praeſcribitur, vt ſpatia a corporibus deſcripta ſint temporibus proportionalia; ſcilicet pro caſu praeſenti elementum ſpatii a centro inertiae C circa A deſcripti eſt $v^2 d\theta$, cui elemento ſi addatur iſtud $cc d\psi$ ex motu rotatorio deriuatum, horum elementorum ſumma erit elemento temporis proportionalis. Altera vero aequatio ex principio conſeruationis virium viuarum deducitur, exiſtente celeritate qua centrum inertiae C procedit $= \frac{\sqrt{(dv^2 + v^2 d\theta^2)}}{dt}$ et celeritate motus rotatorii $= \frac{d\psi}{dt}$.

§. 6. Antequam vlterius procedamus, haud praeter rem erit, vt inquiramus quomodo ad has aequationes pertingere liceat per aequationes differentio-differentiales, quae differentialia ſecundi ordinis ipſorum v et θ inuoluunt. Quum igitur ſit:

$$ddx = dd\,v \cos.\theta - 2\,dv\,d\theta \sin.\theta - v\,dd\theta \sin.\theta - v\,d\theta^2 \cos.\theta;$$

$$ddy = dd\,v \sin.\theta + 2\,dv\,d\theta \cos.\theta + v\,dd\theta \cos.\theta - v\,d\theta^2 \sin.\theta;$$

habebimus

$$\frac{ddx\cos.\theta + ddy\sin.\theta}{\alpha dt^2} = \frac{dd\,v - v\,d\theta^2}{\alpha dt^2} = -\frac{T}{M}(\cos.\Phi\cos.\theta + \sin.\Phi\sin.\theta)$$
$$= -\frac{T}{M}\cos.(\theta - \Phi);$$

tum vero

$$\frac{ddy\cos.\theta - ddx\sin.\theta}{\alpha dt^2} = \frac{v\,dd\theta + 2\,dv\,d\theta}{\alpha dt^2} = +\frac{T}{M}(\sin.\theta\cos.\Phi - \cos.\theta\sin.\Phi)$$
$$= \frac{T}{M}\sin.(\theta - \Phi).$$

At-

Atqui quum in triangulo A B C, fit

$$A C : B C = \text{fin. } A B N : \text{fin. } B A C,$$

id eſt $v \text{ fin.}(\theta - \Phi) = b \text{ fin.}(\psi - \Phi$, poſterior aequationum inuentarum in hanc transformatur:

$$\frac{v^2 d d \theta + 2 v d v d \theta}{\alpha d t^2} = \frac{T b \text{ fin.}(\psi - \Phi)}{M},$$

ideoque fiet:

$$\frac{v^2 d d \theta + 2 v d v d \theta + c c d d \psi}{\alpha d t^2} = 0,$$

vnde integrando colligimus

$$\frac{v^2 d \theta + c c d \psi}{\alpha d t} = L.$$

Dein multiplicata aequatione

$$\frac{d d v - v d \theta^2}{\alpha d t^2} = -\frac{T}{M} \text{ cof.}(\theta - \Phi) \text{ per } d v,$$

ſi ad hoc productum addatur aequatio

$$\frac{v d d \theta + 2 d v d \theta}{\alpha d t^2} = \frac{T \text{ fin.}(\theta - \Phi)}{M}$$

per $v d \theta$ multiplicata, conſequemur:

$$\frac{d v d d v + v d v d \theta^2 + v^2 d \theta d d \theta}{\alpha d t^2} = -\frac{T d v \text{ cof.}(\theta - \Phi)}{M} + \frac{v T d \theta \text{ fin.}(\theta - \Phi)}{M}.$$

Nunc quum ſit ex triangulo A B C,

$$A C \text{ cof. } C A B = A B + B C \text{ cof. } A B N,$$

hoc eſt

$$v \text{ cof.}(\theta - \Phi) = a + b \text{ cof.}(\psi - \Phi),$$

ſumtis differentialibus habebimus:

$$d v \text{ cof.}(\theta - \Phi) - v d \theta \text{ fin.}(\theta - \Phi) + v d \Phi \text{ fin.}(\theta - \Phi) = -b d \psi \text{ fin.}(\psi - \Phi) + b d \Phi \text{ fin.}(\psi - \Phi);$$

et ob

$$v \text{ fin.}(\theta - \Phi) = b \text{ fin.}(\psi - \Phi),$$

iſta aequatio in hanc abit:

$$d v \text{ cof.}(\theta - \Phi) - v d \theta \text{ fin.}(\theta - \Phi) = -b d \psi \text{ fin.}(\psi - \Phi).$$

Ideo-

Ideoque noſtra aequatio erit:

$$\frac{dvddv+vdvd\theta^2+v^2d\theta ddd\theta}{\alpha dt^2}=+\frac{bTd\psi\,\mathrm{fin.}(\psi-\Phi)}{M},$$

hincque obtinetur

$$\frac{dvddv+vdvd\theta^2+v^2d\theta ddd\theta+ccd\psi ddd\psi}{\alpha dt^2}=0,$$

et integrando

$$\frac{dv^2+v^2d\theta^2+ccd\psi^2}{\alpha dt^2}=N,$$

prorſus vti ſupra inuenimus.

§. 7. Subſidio autem iſtius aequationis:

$$dv\cos.(\theta-\Phi)-vd\theta\,\mathrm{fin.}(\theta-\Phi)=-bd\psi\,\mathrm{fin.}(\psi-\Phi)$$
$$=-vd\psi\,\mathrm{fin.}(\theta-\Phi),$$

nunc quoque valorem differentialis $d\psi$ per dv et $d\theta$ exprimere licet, quippe qui erit:

$$d\psi=d\theta-\frac{dv}{v}\cot.(\theta-\Phi),$$

et ſubſtituto hoc valore, noſtrae aequationes differentiales primi gradus erunt:

$$(v^2+c^2)\,d\theta-cc.\frac{dv}{v}\cot.(\theta-\Phi)=Ldt;$$
$$(v^2+c^2)\,d\theta^2-2cc.d\theta\frac{dv}{v}\cot.(\theta-\Phi)$$
$$+cc.\frac{dv^2}{v^2}\cot.(\theta-\Phi)^2+dv^2=Ndt^2;$$

quum enim coefficiens α ſit inuariabilis, eum cum conſtantibus L, N, coniunctim ſumere licebit. Sumto nunc quadrato prioris aequationis et poſteriore per v^2+c^2 multiplicata, tumque capta productorum differentia, habebimus:

$$cc(v^2+c^2)\frac{dv^2}{v^2}\cot.(\theta-\Phi)^2-c^4.\frac{dv^2}{v^2}\cot.(\theta-\Phi)^2$$
$$+dv^2(v^2+c^2)=N(v^2+c^2)dt^2-L^2dt^2,$$

quae in hanc contrahitur:

$$\frac{ccdv^2}{\mathrm{fin.}(\theta-\Phi)^2}+v^2dv^2=N(v^2+c^2)dt^2-L^2dt^2.$$

Tum vero quia triangulum A B C praebet

$$b^2 = a^2 + v^2 - 2\,a\,v\,\text{cos.}\,(\vartheta - \Phi),\ \text{fiet}$$

$$\text{cos.}\,(\vartheta - \Phi) = \frac{a^2 + v^2 - b^2}{2\,a\,v}\ \text{et}$$

$$\text{fin.}\,(\vartheta - \Phi) = \frac{\sqrt{(2(a^2+b^2)v^2 - v^4 - (a^2-b^2)^2)}}{2\,a\,v} = \frac{\sqrt{(4a^2b^2 - (a^2+b^2-v^2)^2)}}{2\,a\,v}.$$

Hinc colligitur:

$$\frac{c\,c}{\text{fin.}^2(\vartheta - \Phi)} + v^2 = \frac{v^2(4a^2(b^2+c^2) - (a^2+b^2-v^2)^2)}{4a^2b^2 - (a^2+b^2-v^2)^2}\ \text{et}$$

$$d\,t = \frac{d\,v\sqrt{(c\,c + v^2\,\text{fin.}^2(\vartheta - \Phi))}}{\text{fin.}\,(\vartheta - \Phi)\sqrt{\text{N}(v^2 + c^2) - \text{L}^2}} = \frac{v\,d\,v\sqrt{(4a^2(b^2+c^2) - (a^2+b^2-v^2)^2)}}{\sqrt{(\text{N}(v^2+c^2) - \text{L}^2)(4a^2b^2 - (a^2+b^2-v^2)^2)}}.$$

§. 8. Posito $\frac{d\vartheta}{dt} = p$; $\frac{d\,v}{v\,d\,t} = q$; aequationes nostrae differentiales sequenti modo exprimentur:

$$(v^2 + c^2)\,p - c\,c\,q.\,\text{cot.}\,(\vartheta - \Phi) = \text{L};$$

$$(v^2 + c^2)\,p^2 - 2\,c\,c\,p\,q\,\text{cot.}\,(\vartheta - \Phi) + q^2\,(c\,c\,\text{cot.}^2(\vartheta - \Phi)^2 + v^2) = \text{N};$$

et si insuper statuatur $q = p\,r$; habemus ex priori aequatione:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\text{L}}\,(v^2 + c^2 - c\,c\,r\,\text{cot.}\,(\vartheta - \Phi));$$

et ex posteriori

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{\text{N}}\,(v^2 + c^2 - 2\,c\,c\,r\,\text{cot.}\,(\vartheta - \Phi) + r^2\,(c\,c\,\text{cot.}\,(\vartheta - \Phi)^2 + v^2)).$$

Et ope harum aequationum, aequatio elicitur algebraica, solas variabiles r, v et cot. $(\vartheta - \Phi)$ inuoluens, vbi quidem ob cos. $(\vartheta - \Phi) = \frac{a^2 + v^2 - b^2}{2\,a\,v}$, ista aequatio quoque ad aliam quae solas r et v inuoluit, reduci poterit. Caeterum eiusmodi reductione nequidem opus est, nam si quadratum sumendo prioris aequationis, posteriorem vero per $v^2 + c^2$ multiplicando, productorum accipiatur differentia, haec colligetur aequatio:

$$v^2\,q^2\,(\frac{c\,c}{\text{fin.}^2(\vartheta - \Phi)^2} + v^2) = \text{N}\,(v^2 + c^2) - \text{L}.$$

Hincque iam patet data distantia A C $= v$, vnde simul angulus B A C $= \vartheta - \Phi$ innotescit, dari incognitas p, q, seu

seu $\frac{d\theta}{dt}$; $\frac{dv}{v\,dt}$, easque adeo algebraice per variabilem v exprimi.

§. 9. Proprie tamen loquendo nescio an dici possit Problematis solutionem haberi algebraicam, nisi si ex ista aequatione:

$$(v^2 + c^2)\,d\theta - c\,c\,\tfrac{dv}{v}\cot.(\theta - \Phi) = \mathrm{L}\,dt,$$

substecto pro dt eius valore supra inuento, differentiale $d\theta$ exprimatur per formulam, quae integrationem admittit in terminis algebraicis. De ista quidem expressione:

$$dt = \frac{v\,dv\sqrt{(4a^2((b^2+c^2)-(a^2+b^2-v^2)^2)}}{\sqrt{(\mathrm{N}(v^2+c^2)-\mathrm{L}^2))}\,(4a^2b^2-(a^2+b^2-v^2)^2)},$$

omnino patet eam per integrationem nequaquam ad expressionem algebraicam reduci posse. Caeterum vt simpliciorem haec expressio adipiscatur formam, statuamus $z = a^2 + b^2 - v^2$; $a^2 = e$; $b^2 = f$; $c^2 = g$; hinc $-2v\,dv = dz$ et $v^2 + c^2 = g + e + f - z$; quare insuper ponamus $\mathrm{P} = \mathrm{N}(g + e + f) - \mathrm{L}^2$; his igitur positis nostra aequatio erit $-2\,dt = \frac{dz\sqrt{(4e(f+g)-z^2)}}{\sqrt{(\mathrm{P}-\mathrm{N}z)(4ef-z^2)}}$. De hac autem expressione iam certissime constat, eius integrationem per nequidem per rectificationem sectionum conicarum perfici posse.

§. 10. Quum sit $\cos.(\theta - \Phi) = \frac{a^2 + v^2 - b^2}{2av}$, si differentietur ista aequatio prodibit:

$$-(d\theta - d\Phi)\sin.(\theta - \Phi) = \frac{dv}{2av^2}(v^2 + b^2 - a^2),$$

vnde quum $\frac{d\theta}{dt}$ per variabilem v algebraice exprimi queat, mox liquet $\frac{d\Phi}{dt}$ quoque per v algebraice exprimi posse; quin adeo ipsum $\frac{d\psi}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{v\,dt}\cot.(\theta - \Phi)$ per v expres-

ſione algebraica exhiberi poteſt. Denique pro tenſione fili iſtam habemus expreſſionem:

$$\frac{d\,d\,v - v\,d\,\theta^2}{\alpha\,d\,t^2} = -\frac{T}{M}\cos.(\theta - \Phi),$$

ex qua $\frac{T}{M}$ per ſolam variabilem v expreſſione algebraica exhibere licebit. Nam ponamus $d\,t^2 = V\,d\,v^2$, exiſtente V functione ex ſola variabili v et conſtantibus compoſita, colligitur inde

$$d\,d\,v = -\frac{d\,v.\,dV}{2V} \text{ et } \frac{d\,d\,v}{\alpha\,d\,t^2} = -\frac{d\,V}{2\alpha\,V\,v},$$

ſicque erit

$$\frac{\alpha\,T}{M}\cos.(\theta - \Phi) = \frac{-d\,V}{2\,V\,d\,v} + \frac{v\,d\,\theta^2}{d\,t^2}$$
$$= \frac{d\,V}{2\,V\,d\,v} + \frac{v}{(v^2+c^2)^2}\left(L^2 + \frac{2\,c\,c\,L}{v\sqrt{V}}\cos.(\theta-\Phi) + \frac{c^4}{V\,v^2}\cos.(\theta-\Phi)^2\right),$$

ob $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{V}}$ et

$$d\,\theta = \frac{1}{v^2+c^2}\left(c\,c.\frac{d\,v}{v}\cos.(\theta-\Phi) + L\,d\,t\right).$$

Nunc ſi in iſta aequatione pro V eius valor

$$\frac{v^2\,(4a^2\,(b^2+c^2) - (a^2+b^2-v^2)^2)}{(N\,(v^2+c^2) - L^2)\,(4\,a^2\,b^2 - (a^2+b^2-v^2)^2)}$$

ſubſtituatur, obtinebimus expreſſionem algebraicam pro tenſione fili T ex ſola variabili v et conſtantibus compoſitam, verum ob terminos valde complicatos, non eſt vt huic formulae vlterius euoluendae immoremur.

§. 11. Quia eſt

$$x = a\cos.\Phi + b\cos.\psi \text{ et } y = a\sin.\Phi + b\sin.\psi;$$

habemus

$$ddx = -add\Phi\sin.\Phi - ad\Phi^2\cos.\Phi - bdd\psi\sin.\psi - bd\psi^2\cos.\psi;$$
$$ddy = add\Phi\cos.\Phi - ad\Phi^2\sin.\Phi + bdd\psi\cos.\psi - bd\psi^2\sin.\psi.$$

Multiplicetur $d\,d\,y$ per $a\cos.\Phi$ et $d\,d\,x$ per $a\sin.\Phi$, et pro-

productorum ſumatur differentia prodibit:

$$\frac{a^2 d\Phi d\Phi + ab d\Phi d\psi \cos.(\psi - \Phi) - ab d\Phi d\psi \cos.(\psi - \Phi)}{\alpha d t^2} = 0. \quad (1).$$

Deinde ſi multiplicetur ddy per $b \cos.\psi$, $d\Phi dx$ per $b \sin.\psi$ et productorum ſumatur differentia haec prodit aequatio:

$$\frac{b^2 d\Phi d\psi + ab d\Phi d\Phi \cos.(\psi - \Phi) + ab d\Phi^2 \sin.(\psi - \Phi)}{\alpha d t^2} = + \frac{b T \sin.(\psi - \Phi)}{M};$$

qua propter ſi ad hanc aequationem addatur iſta:

$$\frac{c c d d \psi}{\alpha d t^2} = - \frac{b T \sin.(\psi - \Phi)}{M},$$

conſequimur illam

$$\frac{(b^2 + c^2) d d\psi + ab d d\Phi \cos.(\psi - \Phi) + ab d\Phi^2 \sin.(\psi - \Phi)}{\alpha d t^2} = 0. \quad (II.).$$

Nunc ſi haec aequatio (II.) addatur ad illam (I.) ſupra inuentam, ſumma erit integrabilis, exiſtente quippe ipſo integrali:

$$a a d\Phi + ab (d\Phi + d\psi) \cos.(\psi - \Phi) + (b^2 + c^2) d\psi = L dt.$$

Tum vero ſi aequatio (I.) multiplicetur per $d\Phi$, aequatio (II.) per $d\psi$, productorum ſumma denuo erit integrabilis, exiſtente integrali:

$$a^2 d\Phi^2 + 2 ab d\Phi d\psi \cos.(\psi - \Phi) + (b^2 + c^2) d\psi^2 = N dt^2,$$

quas aequationes cum illis Artic. 6. inuentis, omnino coincidere ſeui adhibita attentione patet.

§. 12. Nunc quidem ex iſtis aequationibus, alterutrum differentiale ſiue $d\Phi$, ſeu $d\psi$ eliminando, ad aequationem pertingere licet, quae praeter bina differentialia dt et alterutrum iſtorum $d\Phi$, $d\psi$ non niſi $\cos.(\psi - \Phi)$ continet. Hoc autem facillime exequetur, ſtatuendo

$$\psi - \Phi = 2\eta; \quad \psi + \Phi = 2\zeta,$$

ex quo $\psi = \eta + \zeta$; $\Phi = \zeta - \eta$. Hinc autem noſtrae aequationes prodibunt:

$$a\,a\,(d\zeta - d\eta) + 2abd\zeta\,\text{cof.}\,2\eta + (b^2+c^2)\,(d\zeta+d\eta) = \mathrm{L}\,dt;$$
$$a^2\,(d\zeta - d\eta)^2 + 2\,a\,b\,(d\zeta^2 - d\eta^2)\,\text{cof.}\,2\eta + (b^2+c^2)\,(d\zeta+d\eta)^2 = \mathrm{N}\,dt^2;$$

siue

$$d\zeta\,(a^2+b^2+c^2+2\,a\,b\,\text{cof.}\,2\eta) + d\eta\,(b^2+c^2-a^2) = \mathrm{L}\,dt;$$
$$d\zeta^2\,(a^2+b^2+c^2+2\,a\,b\,\text{cof.}\,2\eta) + 2\,d\zeta\,d\eta\,(b^2+c^2-a^2) + d\eta^2\,(a^2+b^2+c^2-2\,a\,b\,\text{cof.}\,2\eta) = \mathrm{N}\,dt^2.$$

Sumto nunc quadrato prioris aequationis et multiplicata posteriori per $a^2 + b^2 + c^2 + 2\,a\,b\,\text{cof.}\,\eta$; si productorum capiatur differentia, aequatio ita habebitur expressa:

$$d\eta^2\,((a^2+b^2+c^2)^2 - 4\,a^2\,b^2\,\text{cof.}\,2\eta^2 - (b^2+c^2-a^2)^2) = \mathrm{N}\,dt^2\,(a^2+b^2+c^2+2\,a\,b\,\text{cof.}\,2\eta) - \mathrm{L}\,d\,t^2;$$

quae in hanc contrahitur:

$$4a^2d\eta^2(c^2+b^2\,\text{fin.}\,2\eta^2) = \mathrm{N}dt^2(a^2+b^2+c^2+2ab\,\text{cof.}\,2\eta) - \mathrm{L}^2dt^2.$$

Ex qua aequatione iam differentiale $d\,t$ par $d\,\eta$ habetur expressum, huius autem aequationis consensus cum illa artic. 7. inuenta satis obuius est. Scilicet quum sit $v^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\,\text{cof.}\,2\eta$, prodit

$$\mathrm{N}\,d\,t^2\,(a^2+b^2+c^2+2\,a\,b\,\text{cof.}\,2\eta) - \mathrm{L}^2\,d\,t^2 = \mathrm{N}\,d\,t^2\,(v^2+c^2) - \mathrm{L}^2\,d\,t^2;$$

tumque

$$4\,a^2\,b^2\,d\,\eta^2\,\text{fin.}\,2\eta^2 = v^2\,dv^2, \text{ et } 4\,a^2\,d\eta^2 = \frac{d\,v^2}{\text{fin.}\,(\theta-\Phi)^2};$$

est enim $v\,\text{fin.}\,(\theta-\Phi) = b\,\text{fin.}\,2\eta$.

§. 13. Istud vero negotium ita quoque confici potest, vt mox in aequationes differentiales secundi gradus loco $d\,\Phi$, $d\,\psi$ introducantur differentialia $d\,\eta$, $d\,\zeta$, eruntque tum aequationes istae:

$$a^2 (d\,d\,\zeta - \dot{d}\,d\,\eta) + a\,b\,(d\,d\,\zeta + \dot{d}\,d\,\eta) \text{ cof. } 2\,\eta$$
$$- a\,b\,(d\,\zeta + d\,\eta)^2 \text{ fin. } 2\,\eta = 0;$$
$$(b^2 + c^2)\,(d\,d\,\zeta + \dot{d}\,d\,\eta) + a\,b\,(d\,d\,\zeta + \dot{d}\,d\,\eta) \text{ cof. } 2\,\eta$$
$$a\,b\,(d\,\zeta - d\,\eta)^2 \text{ fin. } 2\,\eta = 0.$$

Vt ex his aequationibus eliminetur $d\,d\,\zeta$, multiplicetur prior harum aequationum per $b^2 + c^2 + a\,b$ cof. $2\,\eta$, posterior vero per $a^2 + a\,b$ cof. $2\,\eta$ et productorum sumatur differentia, quo facto prodibit:

$$d\,d\,\eta\,\{(a^2 + a\,b \text{ cof. } 2\,\eta)\,(b^2 + c^2 - 2\,a\,b \text{ cof. } 2\,\eta))$$
$$+ d\,d\,\eta\,(a^2 - a\,b \text{ cof. } 2\,\eta)\,(b^2 + c^2 + a\,b \text{ cof. } 2\,\eta))$$
$$+ a\,b\,(d\,\zeta - d\,\eta)^2\,(a^2 + a\,b \text{ cof. } 2\,\eta) \text{ fin. } 2\,\eta$$
$$+ a\,b\,(d\,\zeta + d\,\eta)^2\,(b^2 + c^2 + a\,b \text{ cof. } 2\,\eta) \text{ fin. } 2\,\eta = 0,$$

quae in hanc contrahitur:

$$2\,d\,d\,\eta\,(a^2\,(b^2 + c^2) - a^2\,b^2 \text{ cof. } 2\,\eta^2)$$
$$+ a\,b\,d\,\zeta^2 \text{ fin. } 2\,\eta\,(a^2 + b^2 + c^2 + 2\,a\,b \text{ cof. } 2\,\eta)$$
$$+ 2\,a\,b\,d\,\zeta\,d\,\eta \text{ fin. } 2\,\eta\,(b^2 + c^2 - a^2)$$
$$+ a\,b\,d\,\eta^2 \text{ fin. } 2\,\eta\,(a^2 + b^2 + c^2 + 2\,a\,b \text{ cof. } 2\,\eta) = 0.$$

Quum vero sit, vt supra inuenimus:

$$d\,\zeta^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + 2\,a\,b \text{ cof. } 2\,\eta) + 2\,d\,\zeta\,d\,\eta\,(b^2 + c^2 - a^2)$$
$$+ d\,\eta^2\,(a^2 + b^2 + c^2 - 2\,a\,b \text{ cof. } 2\,\eta) = \mathrm{N}\,dt^2;$$

si haec aequatio ducatur in $a\,b$ fin. $2\,\eta$ et productum ab aequatione supra inuenta subtrahatur, obtinetur ista aequatio:

$$2\,d\,d\,\eta\,(a^2\,c^2 + a^2\,b^2 \text{ fin. } 2\,\eta^2)$$
$$+ 4\,a^2\,b^2\,d\,\eta^2 \text{ fin. } 2\,\eta \text{ cof. } 2\,\eta = -a\,b\,\mathrm{N}\,dt^2 \text{ fin. } 2\,\eta,$$

quae per $d\,\eta$ multiplicata fit integrabilis, existente integrali

$$2\,a^4\,d\eta^2\,(c^2 + b^2 \sin.2\eta^2) = N\,a\,b\,dt^2 \cos.2\eta + Q\,dt^2,$$

quae aequatio cum illa articulo praecedenti inuenta omnino consentit.

§. 14. In triangulo ABC quum dentur latera $AB = a$, $BC = b$, facile patet quomodo ex dato vel reliquo latere $AC = v$ vel alterutro angulorum,

$$ABN = \psi - \Phi = 2\eta;\ BAC = \theta - \Phi;\ ACN = \psi - \theta.$$

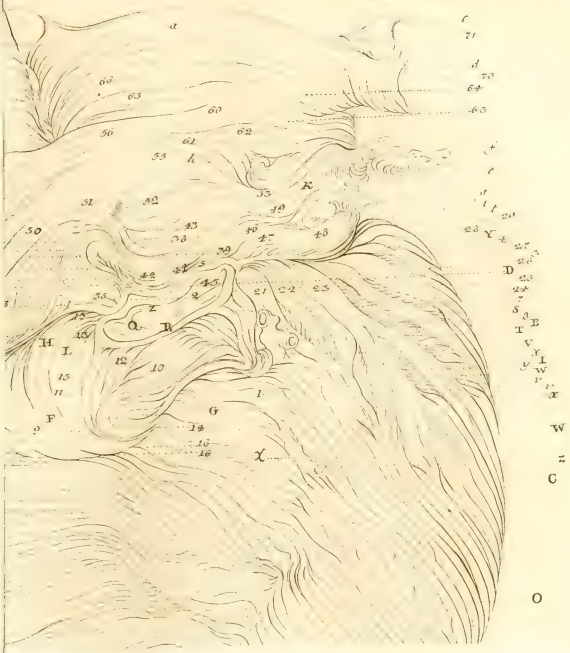
Problematis solutio adornari queat. Verum tamen si loco distantiae v, vel anguli $\psi - \Phi$, introducatur angulus $\theta - \Phi$ vel $\psi - \theta$, formulae quarum ope siue $\frac{d\theta - d\Phi}{dt}$ per functiones anguli $\theta - \Phi$ siue $\frac{d\psi - d\theta}{dt}$ per functiones anguli $\psi - \theta$ exprimuntur, valde erunt complicatae. Tum vero quia area trianguli ABC

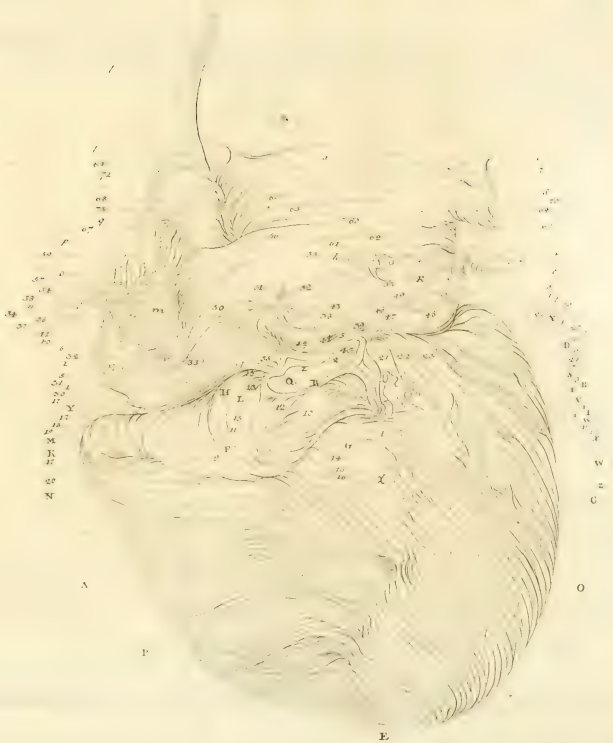
$$= \tfrac{1}{2} AB.BC \sin.ABC = \tfrac{1}{2} a\,b \sin.2\eta,$$

si ista area statuatur $c\,c\,\omega$, ita vt sit $2\,c\,c\,\omega = a\,b \sin.2\eta$, nunc quidem quoque $\frac{d\omega}{dt}$ per functionem algebraicam ipsius ω exprimi potest.

PHY-

PHYSICA.





DE
ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

Dissertatio II.

DE
TEXTV CARTILAGINEO
CORDIS;
SIVE DE FILIS CARTILAGINEO-OSSEIS EORVMQVE IN BASI CORDIS DISTRIBVTIONE.

Auctore
C. F. WOLFF.

Basis sinuum communis. Crena inter eam et basin cordis. Filorum cartilagineorum sedes. Tab. II. Y. Y. 1. 2. 3. 4. 5. Tab. III. x. y. 4. 2. 3. 1.

In basi cordis, in qua sede communi sua basi sinus inseruntur (*a*), distributio inuenitur elegantium filorum cartilagineorum (*b*), principio aliquo communi partim (*c*), partim

(*a*) Tab. II. Y. 6. Y. Tab. III. z. 4. 1. Haec Tabula in Tomo sequenti ad Dissertationes de fibris ventriculorum externis tradetur.
(*b*) Tab. II. z. 1 3. 4. Tab. III. 4. y. 4. 2.
(*c*) Tab. II. 2.

tim anaſtomotico ramo (*a*), inter ſe cohaerentium. Hanc baſin ſinuum nimirum transuerſim oblongam eſſe in ſuperioribus dictum eſt. Eadem ſi ventriculi cordis et orificia venoſa, ſiue ſtatu intromiſſo, ſiue irrumpente ſanguine, dilatantur, latitudinem, ſeu dimenſionem ab anteriori ad poſteriorem ſinuum parietem, pollicis quaſi, vel pollicis cum dimidio, longitudinem transuerſalem quatuor ſaltim pollicum, habet. Si collapſa contra orificia venoſa ſunt, quae maximam ſcilicet partem baſis ſinuum occupant, velut in ſtatu cordis ſpontaneo, vix lineas quatuor latitudo, cum eadem, aut paulo maiori, longitudine transuerſa, ſuperabit. Sic transuerſim oblonga haec baſis ſinuum omnino, ſed adeo anguſta quidem eſt in ſtatu ſpontaneo cordis, vt tanquam linearis fere conſiderari poſſit. Hac baſi parietes ſinuum, pariter communes, anterior alter et ſuperior, alter poſterior et inferior, vterque planus, poſitione, fere verticali in baſin cordis, erecti ſunt; modo vt paries ſinuum anterior antrorſum magis, poſterior retrorſum, ſuperficies contra cordis ſuperior ſurſum, inferior magis deorſum paulnium, et baſis ergo cordis retrorſum, reſpiciant. Sic angulus, ſiue crena, inter parietes ſinuum, ſurſum maxime et deorſum ſuperficiebus ſuis externis ſpectantes, et prominentem circumquaque baſin cordis, quae maxime retrorſum reſpicit, formatur. In hac crena igitur, baſin ſinuum circumſcribente, fila, quae dixi, aut rami, cartilaginei quatuor, duo anteriores, ad baſin parietis ſinuum anterioris ducti, alter dexter (*b*), alterque ſiniſter (*c*), duo pariter poſteriores, ad

poſte-

(*a*) Tab. II. 5.
(*b*) Tab. II. 2. 1.
(*c*) Tab. II. 3. 4.

posterioris parietis sinuum basin exterius repentes, dexter similiter alter (*a*), alterque sinister (*b*), ea distributi sunt ratione, vt orti principiis crassioribus in parte basis sinuum fere media (*c*), bini dextri (*d*) dextrorsum, sinistri (*e*) sinistrorsum, paulatim extenuati progrediantur, extremitatibusque acutis sensim euanescendo finiantur.

Qua ratione fila reperta.

Regionem praeparando basilarem ventriculi dextri primum horum ramorum, anteriorem dextrum, reperiebam, radici sinus dextri et parti basilari interiectum, speciosо nodulo cartilagineo ortum e latere dextro aortae; inde versus angulum cordis transeuntem, atque in medio circiter itinere desinentem. Quaerendo facile et sinistrum ramum anteriorem in sede analoga inter marginem basilarem ventriculi sinistri et sinus sinistri radicem reperi; haud tamen posterius ad superficiem cordis inferiorem similes tunc suspicando ramos. Denique tamen etiam hos posteriores detexi, quae quidem nullis propriis nodulis oriri, sed potius principiis suis crassioribus ad mediam sinuum basin in se mutuo continuare, indeque vtrinque extenuati excurrere, et acutis extremitatibus tandem pariter ac anteriores finiri videbantur; adeo, vt potius vnum filum hoc esse videretur, crassissimum in parte media, vtrinque sensim extenuatum, quo facies cordis inferior a

(*a*) Tab. III. 4. 2.
(*b*) Tab. III. 4. y.
(*c*) Tab. II. z. et 3. Tab. III. 4.
(*d*) Tab. II. 1. Tab. III. 2.
(*e*) Tab. II. 4. Tab. III, y.

posteriori seu inferiori sinuum superficie communi distincta esset. Longe aliter autem se rem habere vlteriores docuerunt inuestigationes, quemadmodum in sequentibus dicam.

Non videntur iam visa esse.

Vti non facile est, partes inuenire in corpore humano, quae peculiari se commendent pulchritudine, imprimis in viscere primario, velut cor est, in quod toties iam inquisitum; non satis mirari poteram me nunquam de filis eiusmodi *teretibus*, *rigidis*, albis, quibus basis sinuum *exterius* a basi cordis distingueretur, quidquam vel audiuisse, vel legisse. Veniebant in mentem tendines cordis circulares, admissi ab anatomicis quibusdam, ab aliis, iisque praecipuis, *Hallero*, *Senaco*, *Cassebohmio*, reiecti; at isti quidem in orificiis venosis et arteriosis ventriculorum reperiri, et circulares esse, vel annulares, et aequali in toto ambitu latitudine gaudere, nec quidquam ad basin cordis exterius a sinuum basi distinguendam conferre dicuntur; imprimis in parte sinuum media, vbi septum cordis intus respondet, quo nec arteriosa nec venosa orificia se extendunt, et qua tamen in sede ipsa maxime se fila insignia suis crassioribus principiis demonstrant. Quid denique simile etiam inter se habent fila, in rectam lineam extensa, crassioribus principiis in media parte ad basin sinuum in externis faciebus anterius et posterius suborta, hinc vtrinque extrorsum excurrentia, continuo extenuata, sensimque finita, et tendines illi circulares, seu annuli, qui orifici venosa intus obducant? De arteriosis enim Auctorum tendinibus nullum dubium est, quin huc referri non possint. Neque de toto textu cartilagineo loquor,

quor, quem aeque certum eſt a nemine Auctorum perſpectum fuiſſe. De ſolis quatuor ramis huius textus ſermo eſt, quos primis meis laboribus repereram, et quorum aut aliquas partes vidiſſe nonnullos anatomicos, aut coniectura fuiſſe aſſecutos, dubium omnino eſſe poteſt. Quicquid ſit, hoc certum eſt, *Hallerum*, qui verbis non modo, quibus dubius ſaepe ſenſus traditur, ſed iconibus quoque citatis ſuas, quas de tendinibus circularibus venoſis et arterioſis conceperit, ideas declarat, et plurimos caeterorum, quos citat, haec fila cartilaginea ipſa non vidiſſe. Ill. *Senacus* in quatuor diuerſis tabulis (Tab. 12. c. c. c. Tab. 13. d. d. d. Tab. 14. h. h. h. et Tab. 15. c. c. c.) ſuam de venoſis tendinibus circularibus ideam, et ſedem, vbi exiſterent, demonſtrat. *Hallerus*, in *Elementis Phyſiologiae* (Tom. I. pag. 329.) easdem has quatuor tabulas *Senaci*, easque ſolas quidem, citando, ideam ſibi prorſus eandem cum Illuſtri Viro fuiſſe de tendinibus circularibus, declarat. Iam in ſingulis illis iconibus ſtria illa notiſſima alba indicatur, quae in diſſectis extenſisque orificiis venoſis intus ad baſin valvularum apparet, quam recte *Hallerus* meram firmam cellulosam eſſe monet, tendines propterea venoſas aeque ac arterioſas negando, et quae, quamuis fila cartilaginea exterius per has ſedes ducantur, valdopere tamen a filis his ipſis diuerſa eſt. Neque apparent fila cartilaginea in ſtria illa, vti in orificiis, ſimpliciter cum ventriculis et ſinibus inciſis, in conſpectum venit; ſed neneceſſe eſt, vt exterius inter baſin ſinuum communem et extremum marginem baſis cordis quaerantur, vbi a nemine Auctorum, quantum ſcio, oſtenduntur.

Varias

Variae textus cartilaginei partes. Tab. II. z. 1. 2. 3. 4. 5. 6. Tab. III. 4. y. 2.

Variis ex partibus textus cartilagineus cordis conflatus eſt. Conſtat nodulis primum (*a*), quorum iam mentionem feci, et qui radices quaſi partium reliquarum eſſe videntur, non modo quod originem ſingulae inde ſuam petant, ſed maxime, quod omnium primo, ſiue in foetu, ſiue in homine nato hoc fiat, vel in adulto, formari videntur; deinde ramo anaſtomotico (*b*), quo bini noduli inter ſe coniunguntur; poſt haec trunco communi ramorum poſteriorum (*c*); denique ramis his quatuor ipſis, binis ſcilicet poſterioribus (*d*), ex trunco communi ortis, dextro altero, alteroque ſiniſtro, binisque anterioribus (*e*), dextro pariter et ſiniſtro.

Baſis et cornua textus Tab. II. z. 3. 5.

Noduli cum ramo anaſtomotico, quo illi inter ſe iunguntur, (*f*) baſin efficiunt textus cartilaginei; rami (*g*) cum poſteriorum trunco communi (*h*), tanquam cornua, vel, ſi mauis, extremitates conſiderari poſſunt. Hac baſi ſua ita innatus eſt textus cartilagineus baſi aortae, vt nodi fere lateribus eius, vel accuratius dicendo extremitatibus vtrin-

(*a*) Tab. II. z. 3.
(*b*) Tab. II. 5.
(*c*) Tab. II. 6. Tab. III. 4. 5.
(*d*) Tab. III. y. 2.
(*e*) Tab. II. 1. 4.
(*f*) Tab. II. z. 3. 5.
(*g*) Tab. II. e. 4. Tab. III. y. 2.
(*h*) Tab. II. 6. Tab. III. 5. 4.

vtrinque circumferentiae basis aortae inhaereant, ramus anastomoticus vero lateri posteriori huius circumferentiae, fere rectilineo, paulisper inflexo, vel concauo, sit applicatus, et cornua deinde basi aortae posterius, furcarum instar, dextrorsum duo, et duo sinistrorsum, extendantur.

Descriptio basis aortae Tab. II. Q. R.

Nimirum basis aortae (*a*), quamuis catenus similis sit sectionibus arcus aortae, aortaeque dorsalis, vt vtraeque ouales sint, luminaque habeant paulisper compressa, (*b*) figura tamen non minus quam magnitudine a sectionibus arcus differt. Constrictior manifesto basis est, lumen formando angustius, quam arcus in quauis sui parte; vt aorta, vbi orificium egressa est, continuo inflata bulbum aliquatenus eliciat. Figura circumferentiae basis satis irregularis (*c*), neque in omnibus corporibus eadem est. In hoc, cuius iconem dedi, corde, quasi filo aorta ad basin constricta effet, inflexa et plicata, imprimis in latere suo posteriori, obseruatur. In aliis minus crispum hoc latus, attamen incuruatum, reperi. Hoc constans esse videtur, vt posterius latere incuruato, ad cauitatem conuexo, ad superficiem externam posteriorem concauo, anterius arcu, conuexitate antrorsum, concauitate introrsum spectante, vtrinque extremitatibus, seu angulis, obtusis terminetur.

Appli-

(*a*) Tab. II. Q. R.
(*b*) Tab. II. Q.
(*c*) Tab. II. R.

Applicatio textus ad baſin aortae.
Tab. II. z. 3. 2. 5.

Lateri igitur poſteriori, extus concauo ita ramus anaſtomoticus applicatus eſt, vt ductum lateris vbique ſequatur (*a*), et aorta in baſi ſua huic ramo latere ſuo poſteriori incumbat. Nodi extremitatibus circumferentiae baſis inſident (*b*), ita tamen vt dexter nodus, paulo poſterius collocatus, lateri potius poſteriori, eiusue extremitati ipſi, adhaereat (*c*), et extremitas circumferentiae ergo baſis aortae dexterius prae nodo promineat, vt tota aorta ergo ſyſtemate toto cartilagineo anterior vel ſuperior ſit, eo, quo partes cordis gaudere ſolent, ſitu obliquo.

Noduli textus cartilaginei. Tab. II. z. 3.

Noduli figuram habere ſolent ſeminis auenacei; eiusdemque et magnitudinis, imo potius craſſiorem in altero corde, ſiniſtrum reperi nodulum. Saepius tamen minores quoque et paulo longiores obſeruantur, et videtur plerumque ſiniſter dextro craſſior inueniri. Nec infrequens eſſe videtur, velut fere in horum iconum corde dexter ſe habet nodulus (*d*), vt ramus ſeu filum cartilagineum vna cum nodulo ſuo clauae figuram referat, vt, tanquam ex bulbo ſeta, filum ex nodo oriatur. Conſtans tamen eſt, vt nodulum aliquo modo a filo diſtinguas.

Rami,

(*a*) Tab. II. 2. 5.
(*b*) Tab. II. z. 3.
(*c*) Tab. II. z.
(*d*) Tab. II. z.

Rami, ſeu fila anteriora, dextrum et ſiniſtrum.

Tab. II. 1. 4.

Ex his nodulis ergo, aortam ad baſin vtrinque et in latere poſteriori, ope fili, quo nodi coniunguntur, anaſtomotici, quaſi coarctantibus, rami cartilaginei anteriores egrediuntur; dexter ex dextro nodulo, dextrorſum tendens (*a*), ſiniſter ex ſiniſtro ſiniſtrorſum productus (*b*). In rectam fere lineam extenſi ſunt. Quantum tamen curuati, *ſ* romanum, ſolitum dexter, ſiniſter inuerſum, ductu ſuo deſcribunt; vt primo arcum, ex nodulo ortus, vterque, leuiorem vtrinque, conuexitate ſurſum aut retrorſum ſpectantem, deinde alium porro, leuiſſimum arcum, antrorſum, ſiue ad apicem cordis, conuexitate ſpectantem producat. Vti teretes rami craſſioribus principiis oriuntur, indeque ſenſim gracilescunt, duas quaſi tertias partes baſis ſinus dextri in ſuperficie anteriori dexter ramus emetitur, tenuiſſima extremitate finitus; vt reliqua dexterior pars crenae, inter ſinum dextrum et partem baſilarem ventriculi dextri (*c*) vacua ſit filo cartilagineo, ſola repleta celluloſa firmiori, membranisque externa et interna ſinuum tecta. Siniſter contra, propius margini ſiniſtro cordis obtuſo ortus, breuiorem crenam inter ſinum et ventriculum ſiniſtrum in facie anteriori totam percurrit (*d*), in latere ſinus ſiniſtri tandem ſimili tenuiſſima extremitate finitus. Non confluit tamen cum extremitate rami ſiniſtri poſte-

 rioris,

(*a*) Tab. II. 2. 1.
(*b*) Tab. II. 3. 4.
(*c*) Tab. II. Y.
(*d*) Tab. II. 4.

rioris, sed distinctus est ab eo parte crenae notabili (*a*), quae velut ad dextrum sinum firmiori cellulosa, membranis tecta, constat.

Rami posteriores ex communi trunco orti.
Tab. III. y. 2.

Monui iam in superioribus, detracta membrana externa cum adipe, quae hanc sedem tegit, videri continuo posteriores cartilagineos ramos principiis suis crassioribus confluere, vnumque in media parte crassius, vtrinque extenuatum, efficere filum. (*b*) Confluuntque omnino, et nisi accuratissime cartilagineam subtilantiam prosequaris, cellulosam quamcunque subtilissimam destruendo, nunquam inuenies truncum, quam bini rami coniuncti in hac sede efficiunt, et ex quo ergo illi tanquam duo distincti rami oriuntur.

Truncus, qua sede ramos editurus prodeat.
Spelunca posterior. Tab. III. 4. 5.

Est nempe in media parte inter binas sinuum bases et extremitatem posteriorem marginis inferioris septi cordis, (*c*) in qua ipsa sede rami confluunt, fouea, adipe primum tecta, deinde tenerrima cellulosa repleta. Haec primo aspectu simplex fouea esse videtur. Vbi vero minutius inquisiueris, fibras tenuissimas fasciae basilaris (*d*), quae

(*a*) Tab. III. z.
(*b*) Tab. III. y. 4. 2.
(*c*) Tab. III. 4. 5.
(*d*) Ad basin sinuum commun m fascia fibrillarum tenuium, satis lata, ducta inuenitur, quae totam hanc basin circumdat, quaeque haud

quae arcu in hac ſede anguſto formato foueolam circumdant (*a*), a ſe mutuo ſeparando, foueamque ſic magis magisque dilatando, ſpeluncam eſſe inuenies hanc foueam, profundam, in quam ſe ſubſtantia coniunctorum ramorum (*b*) immergat. Sic truncum primo eſſe apparet, ex quo bini rami oriantur, et qui ex ea ſpelunca prodeat (*c*).

Qua eo adueniat; ſpelunca anterior. Vortex fibrarum baſilarium. Tab. II. 40. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41.

Iam in pariete ſinuum anteriori, pariter in media eius parte, ad baſin, vbi nodus cartilagineus dexter principium emittit rami anaſtomotici (*d*) retro aortam (*e*), ſpelunca pariter datur (*f*), multo quam illa in pariete poſteriori obſeruatu difficilior, et fibris cincta fasciae baſilaris, mirum ductu vorticem (*g*), in hoc imprimis, cuius iconem dedi, corde formantibus. Hae fibrae, ſiue vorticem producant in pariete ſinuum anteriori, ſicut in corde, quod pinxi, ſiue ſimplicem lineam aliqua, quam patiuntur, inflexione exprimant, perpendicularem ad ſinuum baſin, ve-

haud inepte *coronalis*, vel *baſilaris* ſinuum fascia vocari poſſe videtur. Diſtinctae eius partes quatuor ſunt; anterior dextra, poſterior dextra, ſiniſtra anterior, ſiniſtra poſterior, quae tamen, cum in ſe mutuo continuent, vnam fasciam efficiunt. Accuratior eius deſcriptio in ſeqq. Diſſ. dabitur.

(*a*) Tab. III. 82. 82.
(*b*) Tab. III. 5.
(*c*) Tab. III. 4. y. 2.
(*d*) Tab. II. 2.
(*e*) Tab. II. Q. R.
(*f*) Tab. II 40.
(*g*) Tab. II. 35. 36. 37. 38. 39

lut in aliis cordibus vidi; ſemper tamen in ſolo hoc ſinuum pariete anteriori atque in plano eodem continuari, vnumque continuum in hac ſede parietem efficere videntur; vt ne foucola quidem aut crena in ſtatu ſpontaneo cordis appareat. Fibrae nimirum fasciae baſilaris, angulis acutiſſimis ad baſin ſinuum ex cartilagineis filis ortae, ita oblique inde a dextris verſus ſiniſtra in pariete anteriori adſcendunt (*a*), vt maximam partem parallelae filis cartilagineis progredi videantur. Quae ergo propinquae nunc fibrae huic ſedi, vbi ſpelunca eſt, dexterius ex filo cartilagineo oriuntur (*b*), ita a ſolito progreſſu declinant, vt recta fere in ſuo pariete, dexterioribus fibris repreſſis, (*c*) adſcendant primo (*d*), dein arcu circa ſedem ſpeluncae facto (*e*), deſcendant, et ad ſe ipſas ſe applicent (*f*). Quo vorticem efficiunt, vix vllo in alio, ſiue fibrarum muscularium, ſiue vaſorum, ductu ludentium, exemplo viſum; quo ex eadem linea verticali (*g*) fibrae vtrinque profilire (*h*), atque adſcendendo oblique, arcuatim in ſe mutuo continuare, circulumque ſic fere deſcribere (*i*) ſuo ductu videntur. In aliis cordibus, ante exploratis, hunc vorticem non repereram. Videbantur ſolita ſua directione fibrae, ex cartilagineis filis ortae, a dextris ad ſiniſtra ſuper ſedem

(*a*) Tab. II. 31. 31. 47. 48.
(*b*) Tab. II. 35.
(*c*) Tab. II. 33. 34.
(*d*) Tab. II. 35.
(*e*) Tab. II. 36. 38.
(*f*) Tab. II. 39.
(*g*) Tab. II. 37. 40.
(*h*) Tab. II. 37. 39.
(*i*) Tab. II. 36. 38.

ſedem ſpeluncae tranſire, modo vt inflexae paululum in hac ſede lineam formarent verticalem ad baſin ſinuum et ad cartilaginea fila. Siue vero ſimplici linea verticali formata ſuper ſedem ſpeluncae tranſire fibrae videantur, ſiue formato vortice prodire ex eiusmodi linea fere ſimili verticali; plana tamen et continua primo intuitu parietis anterioris ſinuum ſuperficies in hac ſede, vt alibi, in ſtatu ſpontaneo cordis eſſe videtur. Modo dum ſinus inflantur, depreſſior haec ſedes, ſiue linea, foſſulam aliquam leuiorem exhibendo, apparet. In hanc lineam nunc ſi minutius inquiſiueris, fibras aut vorticis, ad ſe mutuo applicatas, aut quae ſimpliciter, velut in aliis cordibus eſt, inflexae eſſe et tranſire videntur, explicando et a ſe mutuo dilatando; foueam primo, deinde et profundam ſpeluncam deteges in hoc ſinuum pariete anteriori, ſimilem fere illi, quae in poſteriori reperiebatur.

Meatus inter binos ſinuum parietes interiores diſtinctos.

In eam ſi porro vrgeas ſtylum obtuſum, facile meatum tandem inuenies eſſe continuum ex anteriori in poſteriorem ſpeluncam, ſatis, ſi ſenſim ſenſimque dilatetur, largum. Simulque patebit, nihil aliud hunc canalem eſſe, quam interſtitium in hac prope baſin ſede inter binos ſinuum parietes interiores, dextrum ſiniſtri ſinus, ſiniſtrumque dextri, a ſe mutuo diſtinctos, et omnino ſeparatos, modo vt celluloſa, facile ſolubili, leuiter inter ſe connectantur.

Trun-

Truncus ramorum posteriorum, ex ramo anastomotico ortus, per meatum inter sinus transit. Tab. II. 6. Tab. III. 5. 4.

Iam ex ramo anastomotico proxime ad nodum cartilagineum dextrum (*a*), quin saepius ex nodo hoc ipso, velut in cordibus nonnullis vidi, ramus oritur cartilagineus (*b*), satis crassus et anastomotico ramo saltim aequalis. Hic continuo se in spelancam immittit anteriorem. Si spelunca nondum detecta fuerit, nec quidquam de hoc ramo apparet, nisi quod prope nodum dextrum, vbi anastomoticus ramus exoritur, substantia cartilaginea infracta et aliquo modo interrupta esse videatur. Detecta vero spelunca principium huius rami in conspectum venit, qui continuo se in spelancam abscondit. Denique ramus per meatum inter binos sinuum parietes interiores transit, in eumque ipsum truncum continuat (*c*), quem ex spelunca posteriori prodire et binos cartilagineos ramos posteriores producere dixi. Sic truncus ergo ramorum cartilagineorum posteriorum ex ramo anastomotico, prope nodum dextrum in facie sinuum anteriori oritur, transit continuo per meatum inter binos sinus, eorumque bases, prodit in sinuum facie posteriori, et diuiditur in eos ramos posteriores, dextrum atque sinistrum.

Sinuum conditio, parietibus suis internis trunco innatorum.

Mire brevis est hic truncus ramorum posteriorum communis, nec multo duas aut tres lineas longitudine superare

(*a*) Tab. II. 2.
(*b*) Tab. II. 6.
(*c*) Tab. III. 5. 4.

rare videtur. Eiusdem ergo, neque maioris, latitudinis parietes quoque sunt sinuum interiores, quibus prope basin sinus contingunt, eamque efficiunt partem, quae septum sinuum vulgo dicitur. Hinc si sinus inflantur, distincti in hac parte inferiori ad basin anterius et posterius apparent ea crena, cuius in superioribus mentionem iam feci (*a*), et sinus vterque propria superficie puluinata anteriori et posteriori gaudet. Sinus nimirum inflati extenduntur pariesque in quouis eorum anterior a posteriori magis recedit. In media parte autem, vbi parietibus suis interioribus contingentibus trunco cartilagineo innati sunt, extensioni cedere non possunt; vnde crena in hac sede restat et puluinati vtrinque sinuum parietes proprii anterius et posterius efficiuntur.

Structura vorticis. Tab. II. 35. 36. 37. 38. 39.

Ex eadem sinuum compositione, quam minutius in sequentibus dissertationibus explicabo, structura fibrarum quoque intelligitur, quae vorticem in aliis cordibus circa foueam clauiformem, in aliis lineam simplicem verticalem inflexae efficiunt. Vt fibrae nimirum basilares ex filis ad vniuersam sinuum basin cartilagineis oriuntur (*b*); truncus filorum posteriorum communis, dum inter sinus penetrat, similes non minus in hoc transitu suo fibras emittere pergit. Hae ergo, vt illae in pariete sinuum anteriori oblique sinistrorsum adscendunt, in interioribus eorum parietibus

(*a*) Tab. II. 37. 40.
(*b*) Tab. II. 31. 31. 32. 35. 45. 46. 47. 48. Tab. III. 80. 80. 86.

bus contiguis, quos efficiunt, pariter oblique antrorſum nunc progrediuntur, anteriusque prodeunt (*a*). Quae dextrum efficiunt parietem ſinus ſiniſtri, ſiniſtrorſum oblique (*b*), quae ſiniſtrum dextri ſinus, dextrorſum (*c*), prodeuntes in pariete ſinuum anteriori adſcendunt, lineamque ſic verticalem (*d*) ex interioribus contiguis in anteriores ſinuum parietes prodeundo efficiunt. Tum vtraeque fibrae vtrinque oblique adſcendentes arcus formando in ſe mutuo continuant (*e*), circulosque ea ratione producunt vorticis interiores. Quae proxime iuxta vorticis ſedem ex nodo et filo cartilagineo dextro dexterius (*f*), ſiniſterius ex ramo anaſtomotico (*g*), oriuntur, hae, ſicut iam monui, recta fere vtrinque adſcendant primo, deinde verſus ſe mutuo curuatae arcubusque ſimilibus factis maioribus, in ſe mutuo pariter tranſeunt, et circulos ſic efficiunt vorticis exteriores.

Structura lineae ſimplicis verticalis, quae fibris baſilaribus in aliis cordibus loco vorticis formatur.

Paulo aliter res ſe habet in iis cordibus, vbi ſimplicem lineam fibrae inflexae loco vorticis formant. Quae fibrae prope ſedem huius lineae ex nodo vel principio fili cartilaginei dextri oriuntur, directo ductu oblique ſiniſtrorſum

(*a*) Tab. II. 41. 37. 39.
(*b*) Tab. II. 39.
(*c*) Tab. II. 41. 37.
(*d*) Tab. II. 40. 37.
(*e*) Tab. II. 36. 38.
(*f*) Tab. II. 35. 32. 34.
(*g*) Tab. II. 42. 34.

ſum in lineam ipſam adſcendunt; tum vero ſuper eam non tranſeunt, ſimpliciter inflexae, vti videntur, ſed omnino penetrant inter binos ſinus, continuantque in pariete ſiniſtro ſinus dextri oblique retrorſum deſcendendo, et inferuntur in truncum, quem deſcripſi, ramorum poſteriorum cartilagineorum communem. Sic pariter ex eodem trunco aliae fibrae, quae dextrum parietem ſinus ſiniſtri efficiunt, oriuntur, oblique antrorſum in eo pariete adſcendunt, anteriusque prodeunt, et ſiniſtrorſum flexae in fasciae baſilaris ſiniſteriorem partem continuant (*a*). Hae ergo vbi anterius prodeunt, niſi accuratius in lineam, quam formant, inquiſitum fuerit, continuatae eſſe videntur ex fibris illis prioribus, a filo dextro ortis.

Rami cartilaginei poſteriores. Tab. III. y. 2.

Caeterum rami, in quos truncus diuiditur, poſteriores ipſi, vti in media parte baſis ſinuum poſterius principiis ſuis craſſioribus confluentibus oriuntur (*b*), extrorſum inde vtrinque, alter dexter dextrorſum ad baſin ſinus dextri (*c*), alter ſiniſter ſiniſtrorſum ad ſinus ſiniſtri baſin (*d*), vterque ſenſim magis magisque gracilescendo excurrunt; ſimilemque ductu anterioribus ramis figuram fere exprimunt. Dimidiam circiter ſui quisque ſinus latitudinem emetitur, vbi euanescit, crenamque inter ſinuum et cordis baſes reliquam vacuam cartilagine relinquit (*e*).

(*a*) Tad, II. 44.
(*b*) Tab. III. 4.
(*c*) Tab, III. 2,
(*d*) Tab. III. y.
(*e*) Tab, III, x. z. 1. 3.

Vagina textus cartilaginei cellulosa.

Omnis hic textus cartilagineus in singulis partibus suis, quocunque hae distribuuntur, circumdatus est cellulosa tenera sed firma, quae ramulos teretes laxe inuestit, ea ratione, vt quodammodo mobiles in ea haereant, vtque cellulosa super ramos differri paululum possit. Videtur ergo aliquam quasi vaginae speciem efficere, quae tamen fibris omnino flexilibus inclusae cartilagini sit annexa.

Eiusdem membrana, qua tegitur, externa.

Cellulosa ipsa membrana cordis externa extus, vel sinuum membrana, tecta est. Dum scilicet e sinuum basi in basin cordis super crenam, quae sinus a corde distinguit, membrana externa transit, haec ipsa pars, quae transit, cartilagineos ramos, eorumque vaginulas tegit. Sic in vniuersis ramis quatuor, in anterioribus binis et in posterioribus, sic et in nodulis ipsis se res habet. In ramo anastomotico eadem sinuum membrana ex basi sinuum non in basin cordis, sed in faciem aortae posteriorem transit, similemque crenam, quae aortae in hac sede basin a sinuum basi distinguit, et in qua anastomoticus ramus situs est, tegit; vt eadem ergo membrana similique modo et anastomoticus ramus sit tectus. Omnino truncus differt ramorum posteriorum integumenti ratione externi a reliquis textus cartilaginei partibus. Is enim, vti totus in meatu inter sinus ad basin eorum situs est, vtque membrana sinuum externa anteriorem aeque ac posteriorem superficiem totam continua obducit, speluncam vtramque, anteriorem et posteriorem tegit, meatumque claudit; nulla membrana externa tegitur, sed sola hac cellulosa circumdatus est, qua paric-

parietes ſinuum interiores connectuntur, et fibris muſcularibus horum parietum, quae a trunco ipſo oriuntur, quas prodeuntes in ſuperficiem anteriorem vorticem efficere dixi.

Membrana interna.

Interius membrana ſinuum interna textus cartilagineus et vagina, qua hic includitur, tectus eſt. Qua parte ea ad ſinuum baſin intus in orificia deſcendit ventriculorum venoſa, vt annulum valuularum primo, deinde laminam interiorem valuularum ſui continuatione producat, ea fila inueſtit; vt ſi ab exteriore parte hanc ſedem, quam fila occupant, acu perfores, in eam intus incidas ſedem, qua laminae valuularum a ſe mutuo diſcedunt, interior in ſinuum membranam internam adſcendendo, exterior deſcendendo in internam ventriculorum membranam reflexa, continuat.

Interſtitia inter extremitates ramorum, celluloſa ligamentoſa occupata. Tab. II. Y. Y. Tab. III. z. 3.

Non eo vsque ramos cartilagineos vtrinque ſe extendere monitum eſt in ſuperioribus, vt dextri, anterior et poſterior, in latere ſinuum dextro, ſiniſtri in ſiniſtro, contingant; ſed extenuatos euaneſcere in itineribus ſuis, adeo vt tertia quaſi pars ambitus ſinus cuiusque ſuperſit, qua tanquam interſtitio extremitates ramorum anteriorum et poſteriorum vtrinque a ſe inuicem ſeparantur (*a*). Haec interſtitia ergo eadem celluloſa, qua vaginae circa ramos, quo vsque hi ſe extendunt, formantur, tenui at

(*a*) Tab. II. Y. Y. Tab. III. z. 3.

firma, fere ligamentoſa, repleta ſunt. In principiis ſuis prope nodos anterius, poſterius prope ſpeluncam, ex qua truncus communis egreditur, craſſitie ſua totam latitudinem crenae occupant rami, et cellulosa arctius eos circumdare videtur; vbi vero ſenſim gracilescunt, imprimis extremitatibus ſuis tenuiſſimis in media crenae parte ſuſpenſi ſunt quaſi, vt tam verſus ſinuum quam cordis baſin inter fibras musculares et cartilagineam hanc ſubſtantiam celluloſa illa ligamentoſa ſit interpoſita. Denique haec ſola reliquas crenae partes, vbi cartilago deficit, replet.

Fibrae musculares ab his textus cartilaginei partibus ortae.
Tab. II. 31. 15. 7. 45. 47. 21. 22. 24. 25.
Tab. III. 80. 6. 7. 8. 86. 53. 55. 57.

A filis nunc et nodis his cartilagineis, eorumque, quibus circumdantur, vaginis, et a celluloſa, quae interſtitia inter fila replet, magna pars fibrarum externarum ventriculi vtriusque, tum et fibrae illae, quae fasciam baſilarem ſinuum efficiunt, originem ſuam ducunt. Dextri nempe rami, anterior poſteriorque, ad dextrum ſuum ſymbolum conferunt ventriculum (*a*), ſiniſtri ad ſiniſtrum (*b*); ſimulque dextri eam fasciae baſilaris partem fibris, quas emittunt, efficiunt, quae ſinus dextri baſin cingit (*c*); ſiniſtri eam ſimul producunt, qua baſis ſiniſtri ſinus circumdata eſt (*d*). Ramus anaſtomoticus ſoli huic, quae ei reſpon-

(*a*) Tab. II. 15 17. 17. Tab. III. 53. 55. 57.
(*b*) Tab. II. 21 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. Tab. III. 6. 7. 8. 10.
(*c*) Tab. II. 31. 31. 33. Tab. III. 86.
(*d*) Tab. II. 47. 48. Tab. III. 80. 80.

ſpondet, fasciae baſilaris parti pro ſinu ſiniſtro fibras largitur (*a*); cor ipſum nullas ab eo quidem recipit. Truncus communis ramorum poſteriorum et finubus fibras reddit, parietibus nempe eorum interioribus, quibus contingunt, et cordi, nimirum eius ſepto, cuius aliqua portio vtramque, in dextrum ſiniſtrumque ventriculum ſpectantem, ſuperficiem his fibris tectam habet; quemadmodum haec in ſequentibus diſſertationibus fuſius explicabuntur.

Qua ratione oriantur.

Quae fibrae ventriculorum a nodis et a partibus filorum craſſioribus oriuntur, imprimis quae dextri ventriculi fibrae anterius a nodo dextro et a principio rami anterioris dextri, et quae a nodo ſiniſtro principioque rami anterioris ſiniſtri originem ducunt fibrae ventriculi ſiniſtri, hae ipſis carneis ſuis initiis ſubſtantiae cartilagineae ipſi innatae eſſe videntur; vt vel nulla in his ſedibus cartilaginem circumdet celluloſa vagina, vel vna cum carne fibrarum firmiter tamen innata ſit ea celluloſa cartilagini. Quo magis vero a nodis principiisque filorum verſus extremitates recedas, eo latior portio quoque ligamentoſae celluloſae principiis fibrarum carneis et graciliori filo cartilaginco vtrinque, verſus ſinus et verſus baſin cordis, intercedit, eoque manifeſtius nonniſi huius ligamentoſae ſubſtantiae ope carneae fibrae filis cartilagineis inſeruntur; ſicuti fere in reliquis exemplis analogis, non in ipſam cartilaginem penetrare, ſed ſimilis talis tenuis expanſae lataeque et firmae celluloſae, quaſi ligamentoſae, ope, fibrae muſculares cartilaginibus annecti ſolent. Denique quae in inter-

(*a*) Tab. II. 45. 46.

teriſtitiis oriuntur inter extremitates filorum cartilagineorum, ſoli huic, quae ſola has ſedes occupat, cellulosae firmae inſertae ſunt fibrae, tum illae, quae ad ſinuum baſin inde adſcendunt, tum quae deſcendunt ad baſin cordis.

Qua directione ortae progrediantur.

Eam vero hae fibrae ſinuum et ventriculorum cordis, a filis cartilagineis ortae, quoad maximam partem, ſaltim hae, quae inter caeteras validiſſimae ſunt, directionem habent, vt a parte nodorum, aut principiis filorum, oblique verſus extremitatem eorum progrediantur, filaque ergo trahendo extendant. Minor pars, eaque debilior, retrogrado ductu fila agendo retrahit. Validiſſimae nimirum omnium fibrarum cordis externarum illae ſunt, quae partem poſteriorem, baſi propiorem, ventriculi ſiniſtri in ſuperficie cordis conuexa tegunt. Sequuntur craſſitie illae, quae dextrum ventriculum prope baſin, tum in conuexa ſuperiori, tum in inferiori plana cordis ſuperficie, obducunt. His cedunt craſſitie et firmitate, quae poſteriorem in inferiori cordis ſuperficie partem ventriculi ſiniſtri efficiunt. Atque hae ſolae retrogrado ductu ex filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro ortae hoc filum retrorſum agendo trahunt (*a*). Priores omnes ſua fila, dum agunt, extendunt. (*b*) Conſiderandum eſt autem, tum in ſuperiori tum in inferiori cordis ſuperficie vtriusque ventriculi fibras eandem fere directionem habere: procedere nempe a baſi oblique ad apicem ſiniſtrorſum in ſuperficie cordis con-

(*a*) Tab. III. 6. 8.

(*b*) Tab. III. 7. 53. 55. 57. 58. Tab. II. 15. 17. 17. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29.

conuexa (*a*), dextrorſum in plana. (*b*) Sic neceſſe eſſe videtur, vt in qualibet cordis ſuperficie alter ventriculus conſentaneas ductu fibras habeat filo, ex quo oriuntur, alter contrarias; vt conſentaneas habeat in ſuperficie conuexa ſiniſter, contrarias dexter; ſicut in plana conſentaneas dexter, contrarias ſiniſter, quilibet a ſuo recipit filo. Sed fibrae ventriculi dextri, quamuis ſiniſtrorſum per conuexam cordis ſuperficiem obliquae decurrant, in parte tamen baſilari dextrorſum omnino, ortae ex filo cartilagineo anteriori dextro, progrediuntur (*c*); indeque ſuper marginem demum dum flectuntur baſilarem, (*d*) facto arcu ſiniſtrorſum oblique in ſuperiori cordis ſuperficie deſcendunt. (*e*) Sic vtriusque in ſuperiori cordis ſuperficie ventriculi, in inferiori dextri conſentaneo filis ſuis ductu fibrae procedunt; ſolae ſiniſtri in cordis facie plana oppoſita directione ex poſteriori ſuo ſiniſtro filo oriuntur. Fibrillae baſilares ſinuum tenerrimae, quae ſiniſtrorſum oblique in anteriori ſinuum facie, dextrorſum in poſteriori, eodem continuato progreſſu, adſcendunt, conſentaneo ductu ad ſinum ſiniſtrum in anteriori, ad dextrum in poſteriori, ſuperficie, contrario ad ſinum dextrum in anteriori, ad ſiniſtrum in poſteriori, quaeuis a ſuis cartilagineis filis oriuntur.

Natura

(*a*) Tab. I.
(*b*) Tab. III.
(*c*) Tab. II. 15. 17. 17.
(*d*) Tab. II. 14. 15. 17. 17. 17. K.
(*e*) Tab. I. 4. 5. 6. 8. . 14. 19.

Natura textus cartilaginea.

Siue nunc viderint quidam Auctorum haec fila, in cellulosis suis vaginis latentia, cartilaginea ipsa, quae pro tendinibus habuerint, aut aliquas partes eorum; siue sola his eadem, quae *Hallero*, *Cassebohmio*, et aliis, qui tendines negant, stipata cellulosa, sola vagina filorum, quam tendineam putaverint, in orificiis apparuerit ventriculorum venosis; certum est, non tendinosa, sed cartilaginea potius et offescentia, haec fila esse, et totum, quem sua basi, principiis suis et distributione, efficiunt, textum; seu tali substantia facta, quae successu temporis in verum os sua natura et ordine naturae mutetur. Color cartilagineus est, ex albo griseus, caerulescens, subpellucidus, non candor ille tendinum niueus, et splendens, et solide opacus. Si cultro hanc substantiam raseris, imprimis prope nodos, vbi crassiora fila sunt, strepitum edit, quem fere offescentes cartilagines, aut ossa ipsa, quemque nec a crassioribus tendinibus, nedum ab his subtilissimis, exspectes. Nec improbabile est, omnino ossica fieri in corporibus robustis et aetate prouectioribus, vti quoque longiora in hisce et crassiora quam in iunioribus esse videntur. Digitis comprehensa et tacta dura sunt et rigida et elastica. Si prope nodulum filum vna cum sua vagina transuersim diffecatur, extremitas diffecti fili vltra lineam prosilit, vagina retracta, quemadmodum in Tabula ad ventriculi et sinus dextri fibras internas pinxi. Denique plus quam haec argumenta insertio fibrarum muscularium cartilagineam textus naturam demonstrat. Ipsis finibus extremis carnosis fibrae iuxta nodos filis, transuersim ductis, inseruntur. Tendinem quando fibrae producunt, ipsae sensim tendinescunt extenuatae, et in tendinem mutantur, eadem fibrarum directione

sectione continuatum. Si decussatae fibrae lineam efficiant tendineam; et tum sensim carneae fibrae tendinescunt, et lata linea est, et plana, non teres filum, nec eadem vbique latitudine gaudet, sed latior est alibi, vbi citius fibrae tendinescunt, alibi angustior, vbi tardius; et fibrae, quibus linea texta est, tendineae facili negotio in linea distinguuntur, vt carneae in musculo distinguebantur. In his nullo microscopio decussatae fibrae detegi possunt. Quae vero fibrae in extremitates filorum inseruntur in tenuem firmam cellulosam, quasi membranae aut ligamenti speciem, abeunt, eaque in cartilaginem inseruntur, quod etiam magis a tendinum natura alienum est, qui nunquam nisi ex carneis fibris ipsis oriuntur. Neque in rerum natura tendo exitit, aliqua cellulosa aut ligamentosa parte a musculis separatus, aut tendo, nisi in quem fibrae transmutatae sint carneae ipsae.

Vagina ramorum perichondrium.

Vagina ergo, quae laxe alibi ramos cartilagineos inuoluit, alibi firmius iis adhaeret, perichondrium esse videtur, in quod fibrae musculares solito modo inseruntur. Quae tenuis et firma autem cellulosa tela interstitia inter extremitates ramorum replet, ea illam videtur ligamenti speciem referre, qua cartilagineae aut osseae substantiae defectus in aliis analogis exemplis suppleri solet, quae ipsa tandem magis magisque in cartilaginem primo, denique in os mutatur.

Vsus cartilaginei textus.

Cum osse hyoidis maxime cartilaginem comparaverim cordis respectu naturae et vsus. Est suspensa inter

carnes cordis et ſinuum, et mobilis in directionem quamcunque. Sic ſe clauicula habet in leone et tigride, immerſa carnibus muſculorum humeralium, neque aut ſternum aut ſcapulam attingens, aut vlla alia cum parte ſtabili coniuncta. Punctum fixum haec oſſa aut cartilagines muſculis dare non poſſunt in eas inſertis. Nec partes mouendae ſunt, quarum cauſa muſculi eſſent conſtructi. Solam igitur ſedem inſertionis efficiunt, muſculique alterius fibras a fibris alterius diſtinguunt. Hunc imprimis ergo et filorum cartilagineorum vſum eſſe exiſtimo, vt limites deſcribant ventriculorum in hac parte, quo vsque ſe extendunt, eorumque figuram confirment; deinde vt fibras eorum a ſinuum fibris diſtinguant.

Cur tres rami ex dextro nodo ſolus quartus ex ſiniſtro oriatur?

Mirum eſt nodum ſiniſtrum, qui maior eſt, vnum ſolum ſimplex, anterius ſiniſtrum, filum producere, dextrum minorem tria reliqua, anterius dextrum, dextrum poſterius, et poſterius ſiniſtrum. Neſcio ſi veram huius rei cauſam tetigero; at mihi ſic haec, vt dicam ſe habere videtur. Sciunt, qui ova incubata rimantur, et notum eſt caeterum ex ſcriptis *Halleri*, ſolum prima vitae periodo ventriculum ſiniſtrum exiſtere, qui vna cum vaſis ſuis, arteria et vena, ſimplicem figura canalem referat, contra ſe ipſum curuatum; vt vena ſit, quae deſcendit, ventriculus, quae pars canalis curuata, eademque ampliſſima eſt, arteria, quae adſcendit. Huic ergo et duo ſua fila ſunt, aut rudimenta eorum, quae in adulto corpore reperiuntur, anterius alterum, alterum poſterius, quorum quoduis propria origine ex nodo ſuo proprio, anterius ex ſini-

ſiniſtro, ſiniſterius baſi aortae adſidente, poſterius ex dextro, dexterius ei baſi adnato, oritur; vt quot fila, tot quoque nodi exiſtant. Ipſa res iam docet, origines nouas poſthaec, dum nouus ventriculus dexter formatur, nouosque nodos, quacunque de cauſa hoc fiat, non procreari pro nouis, quibus opus eſt ventriculo, filis; ſed deriuari haec a quibus originibus veteris iam ſtabiliti ſyſtematis cartilaginei id commodiſſime fieri poſſit. Vt dexterius ergo nouus veteri ventriculo applicatur, ex proximo dextro nodo, qui proprium hactenus fili poſterioris ventriculi ſiniſtri principium fuerat, anterius nouum filum, poſterius potius ex radice fili poſterioris veteris, vel coniunctum cum hoc ex eodem dextro nodo deriuatur. Sic truncus communis formatur duorum filorum poſteriorum, et tria fila, anterius dextrum, poſterius dextrum, et poſterius ſiniſtrum ex vno nodo, primaeuo dextro, oriuntur.

EXAMEN CHEMICVM ADIPIS PORCINAE

PARS ALTERA.

Auctore

I. G. GEORGI.

Experimenta

circa Adipem Porcinam rancidam.

§. 25.

Trita res eſt Pinguedines animales omnes ſub tepidiore atmoſphaerae ſtatu breuiori vel diuturniore mora plus, minus corrumpi. *Anderſonius* (in Deſcript. Groenlandiae) prodidit adipem Balaenarum in nauibus ſaepe fermentatione quadam bulliente et odorem volatilem pungentem exhalante ferueſcere. Sebum, butyrum, adipes omnes ſenſim flauo cum colore ranceſcunt et ad guſtum acria evadunt, cum acuto foetore. Etiam pinguia e vegetabili regno

regno deprompta olea in hunc corruptionis ſtatum magis minusue cito tendunt.

§. 26. Recte Cel. *Maquer* (Dictionar. Chem. Art. de Putredine) pronunciauit, difficilem in vniuerſum eſſe putredinis analyſin, eiusque eſſentiam viſum noſtrum fugere. Idem cum maxime de pinguium ranciditate valet. *Junkerus* (Conſp. Chem. Tab. LII.) aliique *alcaleſcentiam* vocant, vnde per deſtillationem ſal vrinoſus facile prodeat. Verum euolutio alcali volatilis in aliis animalium ſubſtantiis in ſummo demum gradu praeuiae putreſcentiae accidit, cum totali deſtructione indolis prioris, a quo tamen ſtatu rancor pinguedinum longe adhuc diſtat. Chemici recentiores adipis ranciditatem explicant per corruptelam, qua *acidum* in iis contentum extricatur. Nollem inter oppoſitas illas ſententias pronunciare, ſed experimenta cum adipe maxime rancida inſtituta exponam, relinquens medicis et chemicis, quid inde quisque ad ſcopum ſuum conuertere velit et vbi vlteriorem indaginem neceſſariam putent periti.

§. 27. Adeps porcina in examine hocce chemico adhibita iam vltra triennium membranis ſuis incluſa ſervabatur; cellulosa quaſi corroſa, adipis color flauus, vireſcente maculatus, odor acris, volatilis, nauſeoſus, qui halitu oculorum aciem quaſi obtundere videbatur.

Experimentum 21.

§. 28. Volui ſtatim volatilis huius halitus naturam diſcere, ideoque viginti ſex vncias pinguedinis in alembico

lembico galeato balnei arenae modico calori commiſi. Ob aëris abundantiam quaſi bullire viſus eſt. Vapores chartam ſucco heliotropii tinctam e caeruleo in rubrum colorem euidenter mutarunt. Intenſiore continuato calore tres vnciae phlegmatis limpidi, ſubturbidi ſtillarunt, cuius odor et aciditas minus exaltata videbatur, quam ipſius adipis.

Experimentum 22.

§. 29. Vncias decem extracti per calorem adipis cum viginti vnciis aquae tepidae ſubigi curaui. Aqua hinc turbata, *Heliotropii* tincturam, imo chartulas caeruleas, rubicundo inficiebat colore; chartae tamen iſtae ſiccatione ad caeruleum redibant colorem.

Ablutio adipis repetita fuit, donec adhibita aqua limpidiſſima tandem prodiret; tunc vero adeps, prius rufo fusca, cinereum acquiſiuit colorem et odore imo fere guſtu expers facta eſt. Lotura adipis euaporata lente, magis magisque mucoſa euaſit et reliquit tandem drachmas novem pituitae ſiccae, fuſci coloris, quae inſipida pariter et odoris expers, facile in aqua tepida reſoluebatur. Salſedinis omnino nullum in illa veſtigium per reagentia apparuit. Siccum reſiduum ſub tubo ferruminatorio vrebatur ſpumeſcens, fumo nequidquam vrinoſo; cineresque reſidui alcalinae erant indolis.

Experimentum 23.

§. 30. Adipis non elotae, ſed leni calore ſolutae decem vncias ex retorta in balneo arenae deſtillaui, vti cum adipe recenti (Exper. 4.) actum eſt. Initio admodum

dum ſpumeſcebat, poſtea aucto igne nihil mouebatur. Spumeſcentis adhuc prodiit *Phlegma* albidum ad ſemunciam, ſimillimum digeſtione (Exper. 17.) producto; dein oleum primo rufeſcens, demum nigricans ſequebatur, collectum ad ſex vncias, cum quo ſimul phlegmatis flaui ſex drachmae ſtillarunt. Haec producta non magis volatilem ſpargebant odorem, quam a digeſta recenti adipe (Exper. 17). Oleum cum tribus vnciis aquae agitari curaui, vt acidum extraherem, et aquam dein filtro ſeparaui.

Experimentum 24 ad 27.

§. 31. *Oleum* tribus vicibus ſupra caput mortuum cohobatione deſtillatum, quarto tandem e retorta pura deſtillaui, et poſt ſingulas deſtillationes ab omni phlegmate ſeparatum et aqua ablutum fuit.

Quinta inſtituta deſtillatio praebuit:

1. *Olei* flaueſcentis, pellucidi, bene olentis ℥jß.
2. Rubicundi, ceteroquin ſimilis olei ℥j. ℥j.
3. Omnium autem deſtillationum *phlegma* aequauit pondus vnciarum duo; at
4. Reſiduus *carbo* quartae deſtillationis drachmas nouem, et quintae vnciam dimidiam.

Experimentum 28.

§. 32. *Phlegma* flauum, guſtu ſubacidum, odore volatili, chartam caeruleam rubro, et rubram purpureo intingebat colore. Adfuſa ſolutio ſalis tartari extricauit

alcali volatile, quod ammoniacalem indolem cum praevalente aciditate prodebat.

Experimentum 29.

§. 33. *Acidum* et *alcali* illud vrinosum curiosius indagaui. Phlegma omne, simul cum lotura oleorum, in alembico saturaui Sale tartari purissimo, cuius ad saturitatem exactam drachma cum viginti granis requirebatur. Destillatus dein liquor salinus dedit primo vrinosum, deinde insipidum phlegma. Prius acido salis saturaui exactissime, et saturatum cum efferuescentia liquorem euaporaui, vt residuum granorum triginta quinque veri salis ammoniaci remaneret. Reliquus in alembico liquor in vitro ad siccitatem euaporatus, massam salinam nigricantem praebuit, quae auctiore calore fluxilis est facta. Eadem iterum in aqua soluta et euaporata, sal fuit non plane neutralisatus, deliquescens, subfuscus, ad pondus drachmae cum quinquaginta quinque granis.

Experimentum 30.

§. 34. *Carbo* ex destillationibus reses (Exper. 26. 27.) cum acidis non feruescebat. Bihorio calcinatus in cineres versus est caerulescentes, vnciam et semidrachmam aequantes, quorum conflictus cum acidis alcalinam indolem prodebat.

Cineres eloti aqua e lixiuio, per euaporationem inflam salium drachmas duas et octo grana dederunt; in quo pondere salis culinaris gr. XXXII., reliquum, vt saturatione per acidum vitriolicum patuit, alcali minerale fuit.

Expe-

Experimentum 31.

Terra ab elotione cinerum relicta cum acidis etiamnum conſligere viſa eſt, vnde illam cum duabus vnciis acidi nitroſi digeſſi et inſequenti die mixturam in *Gelatinam* compactam coïiſſe inueni. Diluta eadem ope ſemunciae ſpiritus nitri et ſesquiunciae aquae, iterumque digeſta, fluiditatem recuperauit; deinde filtrata et ſolutione ſalis alcali puri ſaturata, praecipitauit puluſculum ſordide album, qui poſt edulcorationem ſiccatus drachmam pondere et indolem terrae calcareae purae exhibuit.

Species gelatinae originem hic debuit ſimul ſolutae argilloſae et ſiliceae terrae, cineribus iſtis inhaerentibus; obſeruante etiam *Swabio* (Act. Halm. An. 1758). Ob eandem rationem Zeolithus, calce, ſilicea et argilloſa terra compoſitus, acidis in gelatinam reſoluitur; imo Cel. *Bergmann* (Nou. Act. Upſal. Vol. III. p. 98.) docet etiam "Quarzum pulueratum et calce mixtum in igne calcina„torio, ſqui fuſione minime ſufficiat, ita copulari, vt „affuſo dein acido in gelatinam concreſcant." In noſtro forte experimento aqua diluendae gelatinae adhibita ſegregauerit terram ſiliceam et argilloſam, vnde filtrati liquoris reſiduum mera fuit calx.

Experimentum 32.

§. 35. *Terrae* (Exper. 31.) reſiduae ſuperfudi olei vitrioli vnciam ſemis, vnde intumuit. In vaſe porcellaneo ſiccata maſſa et dein aqua deſtillata perluta, exhibuit *cryſtallos aluminares*, exiguas; atque ex his vna cum reſiduo non cryſtalliſato aqua ſolutis, ſolutio ſalis tar-

tari praecipitem dedit *terram argillaceam* ad pondus vndecim granorum.

Experimentum 33.

§. 36. Quod ex vltimo proceſſu ſuperfuit nigrum erat colore. Siccum cum ſale tartari et nitro depurato aa ℥ij contritum in crucibulo ignito paululum detonauit, dein fluxit in maſſam vitream fuſcescentem, humoris atmoſphaerici bibulam et aqua ſolubilem; e qua ſolutione acidum vitrioli deiecit puluiſculum ſordide album, qui edulcoratus et exſiccatus pondere quinquaginta duo granorum fuit.

§. 37. Producta igitur e decem vnciis adipis porcinae in aëre libero mora rancidae factae ſequentia e recenſitis experimentis prodierunt:

1. *Vapores volatiles*, acido pungentes ſeu aër extricatus (Exp. 21.)
2. *Mucilago* ſiccata ad pondus ʒi ℥i (Exp. 22.)
3. *Oleum empyreumaticum* poſt quintam rectificationem limpidum, flauescens vel rubicundum, tenue, boni odoris, pondere ſex vnciarum, drachmarum totidem (Exp. 27.)
4. *Phlegma* flauum, acido-volatile a deſtillationibus iſtis vnciarum ſesquitrium pondere, ſimul vero cum illo, quod digeſtione prima adipis (Exp. 21. 24.) prodierat, quinque cum dimidia vnciarum.

Eoque in *Phlegmate*, praeter aquam et oleoſam partem aderant:

a. *Acide*

a. *Acidi pinguedinis* grana LXV.

b. *Alcali volatilis* tantum, vt acido ſalis ſaturatum grana quadraginta ſalis ammoniaci redderet (Exp. 29.), quae ſimul ſingularem ſpeciem ſalis ammoniaci non bene coadunati conſtituiſſe videntur.

5. *Reſiduum* terreo-carbonaceam, pondere vnciae vnius et drachmarum quinque (Exp. 26. 27.), e quo deinde prodiit:

a. *Alcali minerale* cum exigua portione acidi ſalis, pondere ſimul ℥ij gr. vij (Exp. 30.)

b. Acido nitri ſolutum in *Gelatinam*, terrae calcareae drachmam continentem (Exp. 31.).

c. *Terrae argilloſae* gr. XI. (Exp. 32.).

d. *Terrae ſiliceae* gr. XII. (Exp. 33.).

e. Calcinatione autem diſſipati phlogiſti vltra vnciam integram.

Mucilago e peculiari portione adipis extracta fuit; hinc drachmae circiter nouem variis proceſſibus amiſſae, ponderibus variorum productorum diſpertiendae et addendae ſunt.

§. 38. Collatis productis, quae prioribus experimentis ex adipe recenti obtinui (§. 16.), differt praeſertim rancida:

1. Odore volatili nauſeoſo;

2. Mucciditate ſeu vappiditate;

3. Sale vrinoſo ſeu ammoniacali imperfecto in phlegmate acido contento.

4. Maiori portione alcali mineralis, explicitoque acido salis communis.
5. Maiore solubilitate in alcohole vini (per Exper. 34.). Nullae praeterea apparebant particulae martiales.

§. 39. *Restitutio adipis rancidae* per ablutionem in aqua tepida Exper. 22. constat. Etiam frigida aqua adhibita foetorem eluit et colorem in cinereum mutat, sed non in integrum emendat adipem; eadem aliquantum equidem mucosi, sed salini nihil suscipit.

Experimentum 34.

§. 40. Vncia rancidae adipis in quatuor vnciis alcoholis digesta, tincturam producit male olentem, et sapore tetram, quae per reagentia aciditatem podit. Quum tincturam istam aquae frigidae instillaui, enatauit drachma vna olei; adeps vero digestione parum emendata fuit.

Experimentum 35.

§. 41. Duodecim vncias adipis antiquae rancidae, leni calore solutae in arenae balneo, calore per lampadem inter 98 et 106 gradus Thermometri Fahrenheitiani sustentato per viginti nyctemera continua digessi. Adeps post quintam diem superius fusca, imo nigricans; post decem dies omnis nigrescebat; viginti dierum digestione fusca, odore minus volatili, sed magis nauseoso et paene foetido, gustu minus acris, quasi vappida euasit.

Experimentum 36. 37.

§. 42. Vncia diuturnam digestionem passae adipis aqua cota, vix magis muculentam indolem prodidit, quam non

non digesta adeps (Exp. 22.). Neque extractum spirituosum ad normam Experimenti 34. institutum euidentius differebat.

Experimentum 38. 39. 40.

§. 43. Decem vncias adipis ex digestione illa diuturna, per retortam ex arena, eodem plane modo vt Exper. 23. expositum est, destillaui. Oleum primo butyraceum, deinde grumosum nigricans ad octo cum dimidia vncias, simulque phlegmatis minus, quam in citato experimento, volatilis semuncia prodiere.

Oleum aquae destillatae quatuor vnciis ablutum, vt acidum praeberet, deinde supra caput mortuum denuo tertioque rectificatum, stillauit rubro colore fluidissimum, odore laudabili et pondus vnciarum sex cum totidem drachmis effecit.

Phlegmatis tribus destillationibus prodierunt septem drachmae. *Residui* vero carbonacei pondus aequabat vnciam et quatuor cum dimidia drachmas; adeoque septem cum dimidia drachmae his processibus amissae sunt.

Experimentum 41.

§. 44. *Phlegma* flauum empyreuma volatile olebat. Reagentia indicarunt alcali volatile in illo praeualere, licet cum acidis non feruesceret; acida pariter et alcali fixi solutio flocculentum effecerunt; argentum in acido nitri solutum cinereo, mercurium vero ex eodem acido flauescenti colore deiecit hoc phlegma. Idem simul cum lotu-

ra

ra olei ſuper duabus drachmis ſalis tartari leniter deſtillatum exhibuit:

1. *Spiritum vrinoſum* purum, qui ad plenam ſaturationem guttis XXXIV. perductus, Sal ammoniacum praeſtitit.

2. Reſiduum in retorta grana XXXII. *Salis tartari* ſaturauerat, prout addito ad plenam ſaturitatem aceto concentrato apparuit. Adeoque phlegma etiam hic ammoniacalis fuit indolis.

Carbo ita nihil ab illo, quem adeps non digeſta dederat, differre viſus eſt, vt peritiore ſcrutinio haud indigeret. Amiſſum vero pondus (Exp. 40.) ℥vijß. etiam hic reliquorum productorum ponderi iuſto modulo addendum erit.

§. 45. Pinguedo igitur rancida digeſtione diuturna, a cruda degenerauit ita, vt 1. minus volatilis. 2. minus acido (per digeſtionem forte deſtructo) imbuta, contra 3. explicito ſale volatili alcalino ditata eſſet.

VER-

VERBASCA NOVA HYBRIDA.

Auctore

J. T. KOELREVTER.

Praeter Verbasca ista hybrida XXII, quae in libellis: Zweyte und dritte Fortsetzung der vorläuffigen Nachricht von einigen das Geschlecht der Pflanzen betreffenden Versuchen und Beobachtungen. Leipz. 1764. und 1766. in 8. vernacula lingua olim publicaui, quatuordecim aliae nouae huius generis species mihi restant describendae, succedentibus annis ex foecundo matrimonio generatae. Subnectam his, lege iam semel atque iterum in Commentariis Petropolitanis stabilita, breuem eorum experimentorum recensionem, quae felici caruere successu.

Exp. I.

Verbasc. *phlomoides*, ♀.
Stigm. bicolli;
Fl. fluuo.
Verbasc. *Blattaria*, ♂.
Fl. albo.
An. 1764. d. 25. Iun. et seq. Flores 7.

Deſcriptio.

Floruit haec planta hybrida die 25. Aug. 1765. Folia eius infima lanceolata, in crenas ſat profundas ac obtuſas, quae iterum in minores diuidebantur, inciſa erant. Nerui primarii in eorum nonnullis pallide purpuraſcentes. In vniuerſum autem haec folia radicalia obſcure viridia, rugoſa, rigidiuscula, margine vario modo plicata, ac in vtraque ſuperficie tomento valde raro obducta. Folia caulina valde amplexicaulia non modo, ſed etiam mediocriter decurrentia, ſat numeroſa, nec multum a ſe inuicem diſſita. Caulis primarius pallide viridis, leuiter ſtriatus, tomento rariori, vti folia, veſtitus, ac infra mediam ipſius longitudinem in quinque, ſat longos ac flexiles ramos diuiſus. Flores breuibus quidem interuallis, attamen cuncti tantum a ſe inuicem remoti erant, vt nudus caulis inter eosdem vndique apparuerit. Eorum vtplurimum duo vel tres ex vno centro communi orti. Lacinia iſta corollae, euolutioni proxima, exterius, patris inſtar, ſpadiceo colore tincta erat; is autem poſt plenariam floris explicationem fere totus euaneſcebat. Pedunculi florum 2‴ longi, ſaepius etiam paulo longiores. Calyx vna cum pedunculis breui rariorique tomento obſitus, inque lacinias latiusculas lanceolatas diuiſus. Corolla flaueſcens, laciniis ſubrotundis ac vtrinque modice reflexis. Circulus in floris medio purpuraſcens, inferiores lacinias verſus interruptus, ſtriaeque ipſius longiores, pilis concoloribus inſtructae. Filamenta pallide flaueſcentia, facie interiore purpurea, quorum duo inferiora pilis leuiter purpuraſcentibus, tria ſuperiora vero ex albido flaueſcentibus obſita. Facies exterior filamentorum duorum inferiorum penitus calua. Antherae viridulae,

lae, puluisque ipſarum aurantii coloris. Germen ex ouato-ſubrotundum, tomentoque tenuiſſimo obueſtitum. Stylus pallide viridis. Stigma viridiuſculum ac leuiter bicolle. Plantae hae omnes in ſummo gradu ſteriles.

Comparatio hanc inter hybridam, eiusque parentes facta.

Caulis ac rami graciliores minusque tomentoſi, quam in ♀; aſt craſſiores, nec plane glabri, vt ♂.

Folia minora, anguſtiora, rugoſiora, multo glabriora, viridiora, minus amplexicaulia, crenis obtuſioribus, profundioribus ac notabilioribus, quam in ♀; ſed maiora, latiora (minus linguaeformia, ſed lanceolata magis), non adeo rugoſa, tomento veſtita (nec plane glabra ac nitida) pallidius virentia, magisque amplexicaulia: crenis acutioribus ac obſoletioribus, quam in ♂.

Pedunculi longiores, graciliores, minusque tomentoſi, quam ♀; ſed breuiores, craſſiores, minusque glabri, quam ♂.

Flores ex vno centro communi pauciores, magis remoti a ſe inuicem, ac minores, quam in ♀; aſt ex eodem centro plures, (nec ſolitarii) approximati magis ac grandiores, quam in ♂.

Calyx minus tomentoſus ac minor: laciniis non adeo acuminatis, quam in ♀; ſed tomentoſus magis ac maior, laciniis paulo acutioribus, quam in ♂.

Corolla paulo minor, coloris pallidioris, facilioriſque detractionis, quam ♀; aſt paulo maior ac detrahi non ita facilis, quam ♂. Circulus interruptus, ſtriatus, purpuraſcens, quo ♀ penitus caret, ♂ autem notabilior idem ac obſcurior. Facies corollae exterior hinc et inde ex ſpadiceo purpuraſcens leuiter; cuius coloris ne veſtigium quidem in ♀, idem vero in ♂ obſcurior, quam in ☿.

Stamina graciliora, quam in ♀, aſt craſſiora, quam in ♂. Color plerumque ipſorum pilorum purpuraſcens, pallidior licet, quam ♂, in cunctis ♀ vero vndique ex albido flaueſcens. Filamenta duo inferiora reliquorum inſtar pilis obſita; in ♀ autem eadem fere penitus glabra. Puluis antherarum intenſioris aurantii coloris, quam in ♀.

Piſtillum: ouarium minus tomentoſum, ac cylindraceum magis, vel ſuperne non adeo obtuſum, quam in ♀; at magis tomentoſum idem ac paulo acutius, quam in ♂. Stigma magis clauatum, quam ♀, ſed vtrinque deorſum porrectius, quam ♂.

Exp. II.

Verbaſc. *phlomoides*, ♀.
Stigm. billi.
Fl. flauo.
Verbaſc. *Blattaria*; ♂.
Fl. flauo.
An. 1764. d. 2. Aug. Flor. 5.
Vid. Exp. inuerſ. III.

De-

Descriptio.

Plantae hae, praeter colorem corollae penitus flauum, ab iis Exp. praecedentis non erant diuersae, licet incrementum earum non ita vegetum, ac florescentia difficilior fuerit.

Exp. III.

Verbasc. *Blattaria*: ♀.
Fl. flauo.

Verbasc. *phlomoides*; ♂.
Stigm. bicolli;
Fl. flauo.

An. 1764. d. 29. Aug. et seq. Flor. 8.
Vid. Exp. inuers. II.

Descriptio.

Omnes hae plantae ab istis exp. inuersi II. huad diuersae:

Exp. IV.

Verbasc. *Thapsus*. ♀.

Verbasc. *phlomoides*, ♂.
Stigm. bicolli;
Fl. flauo.

An. 1769. d. 9. Iul. Flor. 6.
Vid. Exp. inuers. V.

Descriptio.

Flores quinque harum plantarum, respectu ipsorum structurae, magnitudinis ac coloris, inter istos ♀ et

♂ in vniuerſum medium tenebant. *Calyx* v. g. maior, paulo minus tomentoſus, latioribusque ac longioribus laciniis inciſus, quam ♀; ſed minor, magis tomentoſus, anguſtioribus ac breuioribus laciniis inſtructus, quam ♂. *Corolla* maior, facie exteriore ſubtili quidem, aſt minus notabili tomento veſtita, in lacinias non adeo oblongas, ſed ſubrotundiores diuiſa, colorisque ſaturatioris ac viuidius flaueſcentis, quam ♀; aſt minor eadem, magisque tomentoſa, laciniis haud ita rotundis, ſed ad oblongiorem formam conſtructis, coloreque paulo pallidiore, quam ♂. Tubus corollae minor, quam ♀; aſt maior, magisque diſtinctus, quam ♂. Pili *filamentorum* longiores, quam in ♀, ſed breuiores, quam in ♂. Ita quoque filamenta duo maiora facie ſua interiore, ♀ inſtar, pilis obſita, cum eadem ♂ tota glabra ſint. *Puluis antherarum* coloris aurantii ſaturatioris, quam in vtroque parente, ex meris folliculis paruulis, inanibus ac ellipticis, conſtabat, thecas ipſarum minime explentibus; hinc etiam factum eſt, vt ab his ſub contractione integumentorum, floreſcentiae tempore euenientе, vix aliquid eius excerni potuerit. Particulae puluеris antherarum ☿ aquae immerſae, immutatae permanebant, cum iſtae ♀ et ♂ e contrario formam ipſarum ellipticam ſub eodem ſtatu cum ſubgloboſa commutare conſtanter ſoleant. Vix vna earum vel altera ſub multarum copia reperiunda, quae ab hauſta aqua modice intumeſcebat, ſemine virili forte repleta. *Stigma* non ſubrotundum, vt ♀, ſed, ♂ ad modum, vtrinque leuiter bicolle. *Folia* harum plantarum notabilius crenata, non adeo tomentoſa ac obtuſa, nec ita profunde amplexicaulia, quam in ♀; aſt tomentoſa magis, obtuſiora, crenis minus notabilibus inſtructa, magisque amplexicaulia, quam ♂.

Caules

Caules ſecundarii ipſorumque rami multo numeroſiores ac longiores, quam in ♀; ſed pro ratione pauciores ac breviores, quam in ♂. Foliola floralia non tam paruula ac inconſpicua, vt in ♀, nec tamen adeo magna, vt in ♂. Caules ſecundarii in prima planta 9, in ſecunda, quae proxime ad radicem citra craſſum primarium, tres alios paulo graciliores emittebat, 48, exilioribus non computatis, in tertia 14, in quarta 17, ac in quinta 18; cum e contrario ♀ vna non vltra ſex, ac altera tres tantum exporrexerit. Altitudo primae harum ☿ $6\frac{1}{2}$ aequabat, ſecundae $8'$, $10''$, tertiae $7'$, $3''$, quartae $9'$, $6''$, ac quintae $10'$. Peripheria caulis primarii, proxime ſupra radicis tumorem, in prima $5''$, in ſecunda $6''$, in tertia $5''$, $3'''$, in quarta $7''$, $3'''$, ac in quinta $6''$, $3'''$. *Not.* Omnium harum plantarum radices proxime infra caulis primarii principium in ingentem ſubinde tumorem ſe extollebant, cuius peripheria in ſecunda $1'$, $2''$, in quarta $1'$, $5''$, ac in quinta $10'$, $6'''$. Cunctae in ſummo gradu ſteriles erant, licet ab initio Iulii vsque ad Septembris medium innumeris floribus condecoratae fuiſſent plantae; hinc etiam earum ſpicae, ex defectu capſularum, tantam craſſitiem non adſequebantur, quam iſtae ♀ et ♂. Magnam florum copiam puluere antherarum ♀ et ♂ ipſe quidem conſperſi, ſed fruſtra. Clare hinc elucet, ♀ et ♂ diſtinctas eſſe ſpecies, nec vnam alterius varietatem. Longitudo ſpicae florum primariae in earum altioribus $5'$, in ♀ e contrario $1\frac{1}{2}$, vel $2'$. $2''$. tantum. Nulla harum ♀ autumnum verſus denuo progerminabat, ſed, contra multarum aliarum, in ſpecie huius generis hybridarum morem, peracta floreſcentia emoriebantur omnes.

NB.

NB. Caſtratio ♀ omnimoda difficillima, nec niſi in clauſo adhuc flore ac ſecurius ante eius explicationis diem bene peragenda.

Exp. V.
Verbaſc. *phlomoides.* ♀.
Stigm. bicolli.
Fl. flauo.

Verbaſc. *Thapſus.* ♂
An. 1772. d. 8. Aug. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. IV.

Deſcriptio.

Plantae iis Exp. inuerſi IV. admodum ſimiles.

Exp. VI.
Verbaſc. *phoeniceum.* ♀.

Verbaſc. *Blattaria.* ♂.
Fl. albo.
An. 1765. d. 3. Iul. et ſeq. Flor. 6.

Deſcriptio.

Flores pallidiores, quam ♀, cum vmbra quaſi fuſiginea; ceterum ab iis, quas olim (vid. zweyte Fortſ. der Botaniſ. Nachr. etc. S. 31. IV. Verſ.) deſcripſi, haud diſcrepantes plantae.

Exp. VII.
Verbaſc. *Thapſus.* ♀.

Verbaſc. *phoeniceum.* ♂.
An. 1769. d. 18. Iul. et ſeq. Flor. 3.

Deſcri-

Descriptio.

Plantae iis Exp. inuersi (vid. dritte Fortſ. der Vorläuf. Nachr. etc. S. 2. I. Verſ.) plane ſimiles.

Exp. VIII.

Verbaſc. *phlomoides*, ♀.

Stigm. bicolli.

Verbaſc. *phoeniceum*. ♂.

An. 1765. d. 7. Aug. Flor. 3.

Descriptio.

Plantae ab iis Exp. inuersi (vid. zweyte Fortſ. der Vorläuf. Nachr. etc. S. 18. II. Verſ.) haud diuerſae.

Exp. IX.

Verbaſc. *Lychnitis*. ♀.

Fl. flauo.

Verbaſc. *phoeniceum*. ♂.

An. 1765. d. 5. Iun. Flor. plures.

Descriptio.

Plantae, ſi colorem corollae e flauo et phoeniceo mixtum exceperis, ab iis olim deſcriptis (vid. dritte Fortſ. der Vorläuf. Nachr. etc. S. 5. 11. Verſ.) non abludentes.

Exp. X.

Verbaſc. *Lychnitis*. ♀.

Fl. albo.

Verbaſc. *phlomoides*. ♂.
Stigm. bicolli.
An. 1772. d. 18. Iul. Flor. 10.

Deſcriptio.

Plantae iis Exp. inuerſi (vid. dritte Fortſ. der Verſuch. Nachr. etc. S. 29. XIII. Verſ.) ſimillimae.

Exp. XI.
Verbaſc. *Blattaria*. ♀.
Fl. flauo.
Verbaſc. *Thapſus*. ♂.
Fl. alb.
An. 1772. d. 7. Aug. Flor. 3.

Deſcriptio.

Plantae inter ♀ et ♂ mediae conformationis, ac, vt ceterae omnes huius generis hybridae, plane ſteriles.

Exp. XII.
Verbaſc. *phlomoides*, ♀.
Stigm. bicolli.
Verbaſc. *Boerhaauii*. ♂. (*a*).
An. 1764 et 1765. d. 25. Iun. et ſeq. Flor. 15.
Vid. Exp. inuerſ. LV.

De-

(*a*) Sub hoc nomine olim ad me miſſa eſt, quoad Auctorum ſynonyma, non facile definienda planta. Cum Verbaſco *Blattaria* multa quidem communia habet, v. g. glabritiem foliorum, florum ac capſularum formam et magnitudinem; flores autem non ſolitarii, ſed aggregati, foliaque ſordidius virentia ac rugoſiora ſunt.

Descriptio.

Altero post fata semina anno, sc. 1767. sub initium mensis Iunii florebat, mediumque inter vtrumque parentem tenebat planta; de reliquo plane sterilis.

Exp. XIII.

Verbasc. *Boerhaauii.* ♀.

Verbasc. *phoeniceum.* ♂.

An. 1765. d. 8. Aug. et seq. Flor. 5.

Vid. Exp. inuerſ. XXXII.

Descriptio.

Planta aequalem vtriusque parentis similitudinem prae se ferebat, sterilisque plane erat, vt ceterae. Color florum illi, qui ex vnione Verbascorum *Blattar.* ♀ et *phoenic.* ♂ oriri solet, non multum absimilis.

Exp. XIV.

Verbasc. *Boerhaauii.* ♀.

Verbasc. *Lychnitis.* ♂.

Fl. albo.

An. 1765. d. 28. Aug. Flor. 7.

Vid. Exp. inuerſ. XXI.

Descriptio.

Plantae 1766 inde prognatae plures, sub finem Maii 1767 florebant, mediae inter vtrumque parentem similitudinis, ac steriles omnes.

Copulationes Verbaſcorum aliae, fruſtra hucusque tentatae.

Exp. XV.

Verbaſc. *Thapſus.* ♀.

Verbaſc. *Boerhaauii.* ♂.

An. 1772. d. 11. Iul. Flor. 2.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XVI.

Exp. XVI.

Verbaſc. *Boerhaauii.* ♀.

Verbaſc. *Thapſus.* ♂.

An. 1772. d. 15. Iul. Flor. 3.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XV.

Exp. XVII.

Verbaſc. *Thapſus.* ♀.

Verbaſc. *Arcturus.* ♂.

An. 1772. d. 9. Iul. Flor. 3.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XVIII.

Exp. XVIII.

Verbaſc. *Arcturus.* ♀.

Verbaſc. *Thapſus.* ♂.

An. 1772. d. 12. Iul. Flor. 5.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XVII.

Exp.

Exp. XIX.

Verbaſc. *Lychnitis*. ♀.

Verbaſc. *Arcturus*. ♂.

An. 1772. d. 29. Iun. et ſeq. Flor. 18.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuerſ. XX.

Exp. XX.

Verbaſc. *Arcturus*. ♀.

Verbaſc. *Lychnitis*. ♂.

An. 1772. d. 29. Iun. Flor. 7.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuerſ. XIX.

Exp. XXI.

Verbaſc. *Lychnitis*. ♀.

Verbaſc. *Boerhaauii*. ♂.

An. 1772. d. 12. Iul. Flor. 28.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XIV.

Exp. XXII.

Verbaſc. *Lychnitis*. ♀.

Verbaſc. *ſinuatum*. β. ♂.

An. 1772. d. 15. Iul. Flor. 33.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XXIII.

Exp. XXIII.

Verbaſc. *Sinuatum.* β. ♀.
Verbaſc. *Lychnitis.* ♂.
An. 1772. d. 18. Iul. Flor. 6.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XXII.

Exp. XXIV.

Verbaſc. *Lychnitis.* ♀.
Verbaſc. *Celſia.* ♂.
An. 1763. d. 14 et 16. Iul. Flor. 12.
Conceptio nulla.

Exp. XXV.

Verbaſc. *phlomoides.* ♀.
Stigm. bicolli.
Verbaſc. *Arcturus.* ♂.
An. 1772. d. 26. Iul. Flor. 2.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XXVI.

Exp. XXVI.

Verbaſc. *Arcturus.* ♀.
Verbaſc. *phlomoides.* ♂.
Stigm. bicolli.
An. 1772. d. 17. Iul. Flor. 10.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XXV.

Exp.

Exp. XXVII.

Verbaſc. *phlomoides*. ♀.
Stigm. bicolli.
Verbaſc. *ſinuatum*. β. ♂.
An. 1772. d. 17. Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XXVIII.

Exp. XXVIII.

Verbaſc. *ſinuatum*. β. ♀.
Verbaſc. *phlomoides*. ♂.
Stigm. bicolli.
An. 1772 d. 17. Iul. Flor. 5.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XXVII.

Exp. XXIX.

Verbaſc. *nigrum*. ♀.
Verbaſc. *phlomoides*. ♂.
Stigm. bicolli.
An. 1764. d. 14 et 15. Sept. Flor. 38.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. Dritte Fortſ. der Vorläuf. Nachr. etc. S. 27. Verſ.

Exp. XXX.

Verbaſc. *nigrum*. ♀.
Verbaſc. *Celſia* ♂.
An. 1763. d. 21. Aug. Flor. 10.
Conceptio nulla.

Exp.

Exp. XXXI.

Verbasc. *phoeniceum.* ♀.
Verbasc. *Celsia.* ♂.
An. 1762. d. 17. Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.

Exp. XXXII.

Verbasc. *phoeniceum.* ♀.
Verbasc. *Boerhaavii.* ♂.
An. 1765. d. 7. Aug. Flor. 7.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XIII.

Exp. XXXIII.

Verbasc. *phoeniceum.* ♀.
Verbasc. *Arctur.* ♂.
An. 1772. d. 27. Iun. Flor. 8.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XXXIV.

Exp. XXXIV.

Verbasc. *Arcturus.* ♀.
Verbasc. *phoeniceum.* ♂.
An. 1772. d. 29. Iun. Flor, 4.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XXXIII.

Exp.

Exp. XXXV.

Verbaſc. *phoeniceum.* ♀.
Verbaſc. *foliis viridibus, annuum,* ♂.
Floribus luteis. (*b*)
An. 1769. d. 12. Iun. Flor. 12.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XXXVI.

Exp. XXXVI.

Verbaſc. *foliis viridibus, annuum,* ♀.
Floribus luteis.
Verbaſc. *phoeniceum.* ♂.
An. 1770. d. 7. Iun. Flor. 20.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XXXV.

Exp. XXXVII.

Verbaſc. *Blattaria.* ♀.
Verbaſc. *Celſia.* ♂.
An. 1763. d. 21. Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XXXVIII.

Exp.

(*b*) Boerh. Ind. H. L. C. 618. Zinn. H. Goett. p. 216. Risler, Diſſ. inaug. de Verbaſco. Argent. 1754. in 4. p. 30. Cum planta haec plenaria foecunditate praedita ſit, ac, vt varietas *V. nigri* putatiua, vnionem cum *phoeniceo* mutuam foecundam absque dubio haud reſpuiſſet: certiſſime nec hybrida ex Verbaſco *nigro* et *Lychnite*, vt Ill. Linnaeo (Fl. Suec. p. 66. n. 187.) olim videbatur, neque mera *nigri* varietas, quam Riſlerus l. c. pronunciauit, ſed vera potius ac diſtincta ſpecies eſt.

Exp. XXXVIII.

Verbasc. *Celsia.* ♀.
Verbasc. *Blattaria.* ♂.
An. 1762. d. 2. Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XXXVII.

Exp. XXXIX.

Verbasc. *Blattaria.* ♀.
Flor. luteo.
Verbasc. *Arcturus.* ♂.
An. 1772. d. 3. Aug. Flor. 3.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XL.

Exp. XL.

Verbasc. *Arcturus.* ♀.
Verbasc. *Blattaria.* ♂.
Fl. lutea.
An. 1772. d. 2. Iul. Flor. 8.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XXXIX.

Exp. XLI.

Verbasc. *Blattaria.* ♀.
Fl. flauo.
Verbasc. *Boerhaavii.* ♂.
An. 1772. d. 12. Aug. Flor. 5.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XLII.

Ex-

Exp. XLII.
Verbasc. *Boerhaavii.* ♀.
Verbasc. *Blattaria.* ♂.
Fl. flauo.
An. 1764. d. 20. Iun. Flor. 6.
It. an. 1765. d. 16. Aug. Flor. 1.
It. an. 1772. d. 12. Aug. Flor. 4.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XLI.

Exp. XLIII.
Verbasc. *Blattaria.* ♀.
Fl. flauo.
Verbasc. *Sinuatum.* β. ♂.
An. 1772. d. 2. Aug. Flor. 3.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XLIV.

Exp. XLIV.
Verbasc. *ſinuatum.* β. ♀.
Verbasc. *Blattaria.* ♂.
Fl. flauo.
An. 1772. d. 18. Iul. Flor. 4.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XLIII.

Exp. XLV.
Verbasc. *Arcturus.* ♀.
Verbasc. *Boerhaavii.* ♂.
An. 1772. d. 11. Iulii. Flor. 8.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XLVI.

Exp. XLVI.

Verbaſc. *Boerhaavii.* ♀.
Verbaſc. *Arcturus.* ♂.
An. 1772. d. 11. Iul. Flor. 3.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid, Exp. inuerſ. XLV.

Exp. XLVII.

Verbaſc. *Arcturus.* ♀.
Verbaſc. *ſinuatum.* β. ♂.
An. 1772. d. 14. Iul. Flor. 9.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XLVIII.

Exp. XLVIII.

Verbaſc. *ſinuatum.* β. ♀.
Verbaſc. *Arcturus.* ♂.
An. 1772. d. 15. Iul. Flor. 4.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XLVII.

Exp. XLIX.

Verbaſc. *Arcturus.* ♀.
Verbaſc. *nigrum.* ♂.
An. 1772. d. 24 et 25. Iul. Flor. 5.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Exp. L.

Verbaſc. *ſinuatum.* β. ♀.
Verbaſc. *Boerhaavii,* ♂.

An.

An. 1772. d. 15. Iul. Flor. 4.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. LI.

Exp. LI.

Verbaſc. *Boerhaavii.* ♀.
Verbaſc. *ſinuatum* β. ♂.
An. 1772. d. 14. Iul. Flor. 7.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. L.

Exp. LII.

Verbaſc. *ſinuatum.* β. ♀.
Verbaſc. *nigrum.* ♂.
An. 1772. d. 24. Iul. Flor. 24.
Conceptio nulla.

Exp. LIII.

Verbaſc. *ſinuatum.* β. ♀.
Verbaſc. *Thapſus.* ♂.
Fl. albo.
An. 1772. d. 16. Iul. Flor. 4.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. LIV.

Exp. LIV.

Verbaſc. *Thapſus.* ♀.
Fl. alb.
Verbaſc. *ſinuatum.* ♂.

An. 1772. d. 14. Iul. Flor. 4.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. LIII.

Exp. LV.

Verbaſc. *Boerhaavii.* ♀.
Verbaſc. *phlomoides.* ♂.
Stigm. bicolli.
An. 1765. d. 6. Aug. Flor. 4.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XII.

Exp. LVI.

Verbaſc. *Boerhaavii.* ♀.
Verbaſc. *Celſia.* ♂.
An. 1765. d. 7. Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

Exp. LVII.

Verbaſc. *Celſia.* ♀.
Verbaſc. *Thapſus.* ♂.
An. 1763. d. 11. Iul. Flor 4.
Conceptio nulla.

ANARRICHAS PANTHERINVS.

RVSSIS

КУСАЧКА, СУКА.

Auctore

BASIL. ZOUIEW.

Inter ſpolia a Dn. *Laxmann* e mari albo olim allata mihique communicata obtinui piſcem aliquem ſiccatum, quem ipſi ruſtici apportarunt ſub nomine Kuſatſchka. Piſcis quanquam vere mihi viſus eſt ſingularis, tamen ob multas partes laeſas totumque ſubiectum ſiccatione valde deſiguratum ego nec agnoſcere eo minus deſcriptioni ſubiicere potui. Curaui itaque nonne poſſem eundem ex Archangelopoli integrum obtinere, ſed incaſſum; ideoque ſepoſui eius deſcriptionem vsque dum occaſio mihi magis ſauorabilis praeberetur. Tandem incidi in ſpecimen muſaeo noſtro aſſeruatum, quo dotauit Celeberrimus Collega noſter *Lepechin*, apportatum ab eo ex itinere ſuo per Roſſiam. Specimen certe pulchrum, ſed deſcriptioni parum idoneum, quoniam effarctor, qui illud ſtupa impleuerat, cutem admodum diſtenſit, vt piſcis figuram fere cilyndricam acquiſiuerit; ideoque non niſi in priſtinum ſtatum re-

po-

ponendo partes exteriores vera quodammodo eius figura potuit diuinari. Vt defectuosum pro accuratiori, quam meretur, descriptione specimen, tamen nouitatis erga, expectando interim donec perfectius obtinuero, nequaquam illud a curiosis Ichthyologis vlterius ignorari mihi suasi.

Dictus piscis est ex genere Anarrhicharum, quorum vnicam tantum nouimus speciem in systemate Ichthyologico, nempe Lupum, ex qua *Linnaeus* et genus suum stabiliuit; ille notissimus fuit etiam antiquis temporibus, hodie frequentissime occurrens in omni haemisphaerio boreali praesertim circa Scotiam, Groenlandiam, totumque tractum Oceani Septentrionalis a Kamtschatka vsque ad mare Mediterraneum et nigrum. At insigniter idem variat secundum diuersas mundi plagas et non nisi in vastissimo Oceano 10 aut 15 pedum longitudine obseruatus est. Ob infestam eius faciem, mordacitatem impetuosumque in aquis natatum omnibus gentibus merito appellatus est Lupus, See-wolf, Wolf-fisch, Russis vero ob horrendos eius dentes Зубатка, Кусачка etc. Clariss. *Steller*, dum Kamtschatcae moraretur propius obseruauit eius ferocitatem in vino, cumque describit dignum suo nomine, quod gerit. Saeuit enim in quaecuis obuia ei oblata; rete irretitus et vulneratus cum vidit cultrum ei praepositum arripuit illico ac veluti stipulam fregit; ligna, baculos, quibus molestabatur, pari ratione confestim apprehendebat morsuque violento diffringere tentabat.

Nostris temporibus detectae prodeunt adhuc binae species, quae primo intuitu mox agnosci possunt, cuius sint generis: figura et facies representant equidem Lupum, mo-

moresque, quotquot cognitum eſt, ſunt iidem ac lupo, ſed habitus corporis externus differens. Vna harum duarum ſpecierum deſcribitur in Zoologia Britannica ſub communi nomine Wolf-Fiſh no. 65, quo etiam Lupus noſter vulgaris deſignitur, ſed illa differt ab hoc, corpore ſtrigis irregularibus, fere transuerſis, fuſcis; altera eſt noſtra ſpecies, quam deſcribendam hic propoſuimus, inſignis maculis per totum corpus rotundis, fuſcis, quam quoque ob rationem & nomen ei indidimus Anarrhichae pantherini?

Deſcriptio.

Facies Gadi Lotae, niſi caput excipias.

Longitudo corporis ab extremo apice roſtri ad extremum marginem pinnae caudae	3 ped.	9 lin.
—— ad initium pin. dorſi - -	7 poll.	3 —
—— filo recta per oculos tenſo ad nucham	3 —	6 —
—— ad medium oculi - - -	2 —	4 —
—— ad nares - - - - -	1 —	3 —
—— ab apice maxillae ſuperioris ad angulos oris - - -	3 —	— —
Intercapedo orbitarum - - - -	1 —	3 —
— — dentium caninor. maxil. ſuper. -	—	10 —
— — — maxil. infer. - -	—	11 —
—— ad angulum valuae branchialis ſumme diſtantem - -	6 —	2 —
—— ab apice labii inferioris ad anum	1 ped. — —	6 —
Altitudo capitis per oculos perpendicul. - - -	—	4 —

Longitudo pinnae dorſalis	-				2	—	3	—	—	—
- - - ani	-			-	1	—	3	—	—	—
- - - caudae	-	-			—	2	—	3	—	
- - - pectoralis	-	-				4	—	—	—	

Accuratiorem partium dimenſionem ſponte omiſi, quoniam in ſiccato ſpecimine partes contractae vix quid fidelis prodere poſſunt.

Corpus teretiuſculum, ventricoſum, lanceolatum, a medio ventre, vbi craſſities eius maxima eſt, ad caudam ſenſim decreſcens, nudum, lubricum. ſquamarum loco punctis minoribus concoloribus adſperſum; cute firma, denſa, coloris luteo-flaueſcentis, maculis per totum corpus et pinnam dorſalem, excepta parte prona, rotundis, fuſcis, maioribus notatum.

Caput ſubgloboſum, ſubproportionale, antrorſum porrectiuſculum, vertice anguſtiore quam mentum, roſtro antrorſum a naribus valde decliui et fere truncato; malae tumidiuſculae, verſus roſtrum extremum depreſſiores, in ſiccato ſpecimine collapſae, cute tectae, vt vertex, maculata. Labia duplicata, carnoſa, antice tenuiora, verſus angulos oris craſſiora, ſiccatione facta rugoſa; mandibula inferior latior ſuperiori; mentum planiuſculum. Apertura oris transuerſa, ampla, ad angulos deorſum inclinans; dentes, qui magis piſcem huius generis a ceteris diſtinguunt, ſunt perquam notabiles; illi enim horrent in toto fere oris hiatu, excepta lingua, quae videtur fuiſſe carnoſa, et quidem in maxillis et palato duplici ordine et diuerſi: in maxilla ſuperiori anteriores primi ordinis conici,

ci, retroflexi, diuergentes, caninos referentes, trium linearum longitudine, in semicirculum dispositi; pone illos habetur alter ordo dentium minorum, rectiorum et aequabiliorum ad molares vsque se extendens; inter vtrumque autem semicircularem ordinem longitudinaliter secundum symphysin ossium maxillarium spatium implent adhuc quatuor dentes mediae inter primarios et secundarios magnitudinis, caeterum similes; molares sunt pariter duplicis ordinis, distantes inter se, robusti, minus acuti, paralleli; palatum munitur septem dentibus validissimis, mediam longitudinem inter molares occupantibus, anteriori pari acuminato, posterioribus non per paria sitis, crassis, rotundis, conniuentibus, obtusis. In maxilla vero inferiori primi ordinis dentes anteriori margini implantati sunt similes, ac isti maxillae superioris, sed numerus horum augetur vlterius per gingiuam ad vtrumque latus tribus aliis minoribus et rectioribus; alter ordo constat antice e dentibus robustis, acuminatis, situ parallelo cum praecedentibus, postea in molares transeuntibus, qui nequaquam ab anterioribus differunt, ni sola mole paulisper maiore. Nares mediae, solitariae, tubulo cutaneo extrorsum prominulae, ad vtrumque latus rostri sitae. Oculi in supremis lateribus capitis, maiusculi, distincti. Operacula branchialia diphylla, flexilia, glabra, ad cardinem superiorem radiata, corporique supra infraque cute alligata. Membrana branchialis patentissima, septemradiata; apertura branchialis lateralis, oblonga, segmentum circuli vel lunam crescentem referens, coarctata.

Gula plana; thorace paululum intumescente, latiusculo.

Dorſum a nucha ad exortum vsque pinnae dorſalis ſenſim ſe eleuat et lateſcit, poſtea vero decreſcit ſitque decliuius et anguſtius vsque ad extremam caudam. Abdomen planiuſculum, verſus latera tumidiuſculum, ad anum decreſcens. Linea lateralis nulla. Anus poſt medium corporis ad exordium pinnae ani.

Cauda lanceolata, ad pinnam ſubcaudalem toroſior, quam ad dorſalem.

Pinna dorſi longitudinalis, continua, quatuor fere pollicum diſtantia a nucha incipiens, poſt medium ſenſim accreſcens, ad apicem caudae terminatur lobo ſubangulato, cumque pinna caudae fere coaleſcit ope radiorum ſpuriorum, breuiorum; altitudo eius media $1\frac{1}{2}$ pollicis; radii pinnae dorſalis, cartilaginei, validi, in dorſo procumbentes, ad caudam erectiores, cute communi, vt corpus, maculoſa tecti, numero, ſpuriis non computatis, 67.

Pinnae pectorales ad inferiora latera thoracis ſitae, ampliſſimae, rotundatae, latitudine ad baſin ſiue brachium duorum pollicum, radiis 20 cartilagineis conflatae.

Pinna ani ſ. ſubcandalis ab ano ad caudae baſin excurrens radiis omnibus fere aequalibus, cartilagineis, numero 44.

Pinna caudae duos pollices cum dimidio longa, extimo apice rotundata, pinnae dorſali ad baſin ope radiorum ſpuriorum coalita, pinnae vero ſubcaudali membrana

na radios eius obuelante annexa; radiis 20, interſtitio medio diſtincto, membranaceo.

Habitat hic piſcis in Oceano ſeptentrionali et Mari albo. A Ruſſis in eſum non trahitur etiamſi caro eius laudetur.

FELIS MANVL,

NOVA SPECIES ASIATICA;

DESCRIPTA

a

P. S. PALLAS.

TAB. VII.

Nemo ferarum faecla et elegans praeſertim *felinum genus* maiori induſtria pertractauit, pluribusque nouis ſpecibus auxit, quam Ill. Comes *Buffonius*. Sed in Naturae theatro omnia complecti et nouiſſe non eſt vnius aetatis, nedum vnius hominis. Haud itaque mirum, complures poſt Illuſtriſſ. Viri labores adinuentas fuiſſe ſpecies, quarum notio Illi defuit. Aliquas praeſertim addidit amiciſſ. *Pennant* (*) et ſpeciem non ignobilem a Cel. quondam Collega noſtro *Güldenſtaedtio* circa Caucaſum, vt et in Perſia

a

(*) *Hiſtory of Quadrupeds. London 1781. 4.* et prius in Editione eiusdem Libri quae antea ſub titulo: *Synopſis of Quadrupeds.* Londin. 1771. 8. prodierat.

a *Gmelino* obſeruatam, mediam inter Caracallam et Felem domeſticam, *Noui* Academiae noſtrae *Commentarii* (*) habent. Quemadmodum vero haec mihi in orientalioribus Roſſiae aſiaticae nusquam obuiam facta eſt, ita contra Collegis ignota manſiſſe videtur alia, cuius hic deſcriptionem et iconem proponere animus eſt, prioribus Zoologis pariter ignotae.

FELIS *Manul*, quam ſum deſcripturus, ab omnibus hucusque cognitis ſpeciebus diuerſa, praeterque Catum et Chaum *Güldenſtaedtii*, minutiſſima fere eſt ſui generis quam Aſia nutrit. In apricis deſertis, praeſertim montanis, Tatariae magnae, a Caſpio lacu vsque ad orientalem Oceanum, ſecundum auſtrales Sibiriae limites paſſim, nec infrequens occurrit. Docent hoc pelles, quas Bochari atque Kirgiſo-Tatari Orenburgum et ad alia Roſſica emporia copioſe venum adportant. Praecipua vero eius patria dici poteſt Mongolorum deſertum inter Sibiriam et Sinicum imperium extenſum, totumque iugis montium et rupibus aſperum. Intra Roſſici Imperii fines praeſertim Dauuria Feles noſtras habet; at circa iugum Altaïcum et Vralenſe vix veſtigium earum hodie obſeruatur. In Dauuria etiam *Meſſerſchmidio* innotuerat, breuibus verbis in Hodegetico MSto. ab eodem commemorata; ſed ſolas is pelles viderat, neque data aſſidua opera animal integrum obtinere potuit. Neque minus ego, quum in transbaïcalenſi regione (1772.) verſarer, incaſſum laboraui vt ipſum animal procurarem, cuius pelles, lynceis colore ſimiles, ſemirublonis pretio pas-

(*) *Noui Commentar. Petropolit. Vol.* XX, *p.* 183. *tab.* 14.

paſſim offerebantur. Etenim in maxime deſertis rupeſtrium ſolitudinum receſſibus vivens, interdiu nido in cauernis vel fiſſuris rupium comparato latet, tantumque noctu praedaturum exit; itaque a Mongolis Tunguſisue per deſerta montana diſpalantibus vix vnquam aeſtate capitur, primaque tantum decidente niue, quum et vellus fit melioris notae, veſtigiis praeſertim prodentibus, in ſpelaeis opprimitur, decipulisue ſtatutis captiuatur. Iamque Dauuriae vale dixeram, quum Amicus qui nunc in vivis eſſe deſiit, curandis finibus Imperii verſus Sinas praefectus, *Simeon Viaſſof*, vt operam in procurandis naturae curioſis ſtrenuam ſemper praeſtiterat, etiam Felis huius noſtrae duo viua exempla, per Mongolos qui ad Dſhidam fluuium (Selengae collateralem) in regione maxime rupeſtri et deſolata viuunt, obtinuit, et quum viua non poſſet, integerrima tamen animalia congelata transmiſit Krasnoiarium, vbi Ianuario 1773. ſequentem eorum deſcriptionem adornaui.

Natura huius Felis a Lynce, cui praeter magnitudinem, aures et caudam elongatam ſimillima eſt, eo praeſertim differt, quod non colat ſyluas, neque in boreales regiones ſpeciem propaget, ſed in apricis atque temperatis, gradu 52. latitudinis auſtralioribus potiſſimum verſetur. Praedatur maxime Lepuſculos alpinum et dauuricum (*), aliaque minuta animalia quae in montanis regionibus abundant. Deficientibus aliis latibulis derelictos vel expugnatos

(*) *Nouae Species quadrupedum e Glirium ordine. Erlang.* 1778. 4. *p.* 45. *et* 59. *tab.* 2. *et* 3.

tos vulpium cuniculos ſibi adaptat; vel Arctomyos (*) domicilia inuadit. Syluas nunquam colit, vnde Roſſis *Stepnaja Koſchka* (Felis campeſtris ſ. deſertorum) appellata eſt; Tatariae Nomadibus Mongolisque communi nomine *Manol* vel *Manul* audit. Baſchkiros autem eandem, ni fallor, ſpeciem nomine *Jalàm* commemorantes audiui, quam etiam appellationem in Chiuenſi et Bocharenſi regione vſitatam eſſe accipio.

Videtur autem alia ab hac diuerſa ad Oxum fluuium (*Syr-daria*) habitare Felis ſpecies, magnitudine et moribus ſimillima Feli Manul, ſed pelle tota minutis maculis varia, quam Chiuenſes et Kirgiſo-Tatari *Malem* ſ. *Malar* vocitant, et cuius tantum imperfectas pelles vidi. Conueniebant hae cum pellibus quas olim e Promontorio auſtrali Africae in Belgio adlatas vidi (**) nec tamen eiusdem ſpeciei temere dixerim. Vlteriores obſeruationes dubium diluant.

FELIS

(*) Mus Arctomys *Nou. ſpec. quadr. e glirium ordine p.* 97. Le Bobak *Buffon. hiſt. nat. Vol. XIII. p.* 136.

(**) FELIS *Pardella* mihi et eadem, ni fallor, quam nomine: Felis capenſis, deſcripſit Cel. *Pennant Hiſtory of Quadrupeds p.* 271. *n.* 162. *Synopſ. of Quadr. p.* 181. Pelles mihi oblatas capenſes ſic deſcripſi: Animal Cato ſylueſtri paulo maius fuiſſe videtur. *Auriculae* paruae nigrae, apice albae. *Lineolae*, vbi myſtax, albae; *myſtaces* promiſcue albi nigrique. *Punctа* ſeu potius *maculae* per totum corpus nigrae, ſimplices, inordinatae, crebrae; *dorſales* paſſim centro obſoletiores; *ventrales* maiores, rariusque ſparſae. *Color* ſupra flauicans, ſubtus albeſcens. *Cauda* variegata, dimidiam animalis longitudinem excedit.

FELIS *Manul* a Cato fero, cui proxima ſtare videtur, praeſertim numero molarium ſuperiorum, caudae proportione, artubus robuſtioribus et colore atque natura velleris diſcrepat. Vellere ita refert Lyncem, vt nihil ſimilius, tantum in pedibus non aeque maculoſa. Cauda variegata et villoſiſſima. Habitu robuſto, maculisque capitis ad nobiliores Felini generis ſpecies tendit, imo omnes facile villoſitate caudae vincit. In medio relinquo, annon apud Aſiae gentes haec quoque ſpecies aliquando cicurata et domeſticae ſtirpi immixta fuerit, eoque originem dederit Felibus angorenſibus dictis, quas alit etiam China, quarumque habitus atque mores nimis a vulgari Cato europaeo abiiudunt, quam vt pro varietate ſimplici haberi poſſint? Certe ſi adulterationi domeſticae ſtirpis, per feram quandam ſpecieni, varietas iſta debetur, videtur nulla aptior ad generandam illam fuiſſe, quam F. Manul, cuius laxum et tenerum vellus et villoſa cauda praevalent.

Habui pro deſcriptione *Felis Manul*, (quae: *cauda ſubelongata annulata apice atra, vertice punctato, corpore albido* — deſiniri poteſt) praeter plurimas pelles, dauricas aeque ac bocharicas, maſcula cadavera duo e Selengienſi regione, vt dixi, transmiſſa. *Pondus* in illo, quem propter integritatem praeſertim ad deſcriptionem adhibui, inedia aliquamdiu emaciato, libras ſex cum dimidia ruſſicas aequavit; in altero, quamuis fere minore, ſeptem cum

(*a*) Minus abſona videbitur haec coniectura, ſi contuleris quae amiciſſ. *Pennant* (*Hiſt. of quadr. p. 272*) de hybridis e *Felc bengalenſi* hydrophila et Cato domeſtico hydrophobo ge eratis habet; quae indolem patris ſecutae aquis audacter immergebantur.

cum dimidia libras et quod excedit. Huius posterioris *longitudo* fuit tota a summo naso ad anum 1 pedis paris. 6 poll. 7 lin. Cauda sine excessu pilorum 8 poll. 9 lin.

Magnitudo ergo supra Catum sylvestrem. *Caput* subglobosum, rostro brevissimo, crasso, obtuso. *Nasus* nudus fuscescit, *labia*que margine nudo nigra: *superius* fulco profundo, late nudo, nigro, vsque ad nasi septum, ei ipsum; *inferius* crista pone caninos integra, arguta. *Gingiuae* fuscescenti maculatae. *Lingua* medio disco vncinulis rigidis hispidata.

Mystaces quatuor ordinum, albi, basi vndulati; in summo ordine setae duae maiores nigrae, anterior basi nigra.

Oculi terui, maxime obliquati, superciliis gibbulis: *Palpebrarum* margines nudi, nigricantes, superior sola, tantumque in medio ciliata pilis a margine remotis. *Periophthalmium* crassum rugosum, instita nigra marginatum, totum fere oculum obtegens, et in profundum sinum, ante bulbum oculi retractile: *Irises* cilute fuluae; *pupillae* oblongae, obliquae.

Verruca supraciliaris insignis, flauescens, radiata, setulis circiter octonis albidis atque flauentibus, nona antica nigra.

Aures latae, sed breues, rotundatae, exterioris marginis prope medii *lobulo* intus rotundato, interiore margine versus basin lamella obsoleta duplicato. *Extus* aures vestiuntur vellere denso, mollissimo, vniformiter flaue-

ſcente-pallido; intus, praeter marginem albido-piloſum, nudae, fuſco ſordidae et anfractuoſae ſunt, ſed clauſae marginibus conniuentibus, pilisque longis, albis, ſubreflexis, circa marginem interiorem baſeos ortis atque, inſtar flabelli auriculam fere excedentis, ſupra cauum auris reclinatis.

Artus robuſtiores, proceriores quam Cati, proportione fere vt in Lynce. *Palmae* latere vtroque fulueſcentes, ſubtus digitis interiectisque plicis, vsque ad callum metacarpi, nigro villoſae; litura inſuper nigra pone callum extrorſum et circa verrucam conicam carpi. Plantae ſubtus villoſiſſimae, villo denſo tophoſo, intenſe fuluae, exterius verſus calcaneum ſtriga nigra marginatae: litura nigricans vtrinque pone callum metatarſi, exterior obſoletior; digiti cum interiectis plicis nigro pariter villoſi. *Falculae* omnium pedum albidae; in palmis vaginae earum cutaceae ſupra latius denudatae, pollicisque falcula robuſtior, maxime adunca.

Cauda villo plusquam pollicari valde craſſata, aequaliter teres, obtuſa, corpori ſubconcolor, *annulis* circiter nouem, propioribus corpori fuſcis, extremis nigris, ſubtusque dilatatis, quorum intermedii magis remoti. *Apex* caudae aterrimus, pilo laeuigato, breuiore, elegantiore (vt in cauda Lyncis); continua ſubtus faſcia vltimos tres annulos connectente itidem atra.

Caput flaueſcenti-exalbidum, area oculorum et ad aures albida: vertex *punctis* creberrimis nigris guttatus; *linea* ſub oculo longitudinalis, atque hinc ſtrigae duo per genas

genas obliquae, parallelae. Roſtrum circa naſum flaueſcit. gula alba; ſed pectus inter armos, cum ima parte colli veſtitum vellere cineraſcente-fuſco, laxiore, extus albido inumbrato. — Reliquum corpus ſubtus, femoraque intus albo-pallida, laxius villoſa, abdomen lituris hinc inde obſoletiſſimis ſubnebuloſum. In reliquo corpore ſupra et extus per artus, vellus colore et conſiſtentia, vt Lyncis: interius fulueſcens, extus albidum, pilorum in dorſo apicibus nigricantibus tenuiter inumbratum; ſed maculae diſtinctae trunci nullae. Apparent quibusdam in extremo dorſo verſus caudam liturae virgatae obſoletiſſimae, plerumque vix conſpicuae. Pedes antici paulo pallidiores. — Altitudo velleris in dorſo 1″. 8‴. ſed pili rari ſupereminent 8‴. longitudine.

Scrotum inter femora inſigne, cumque adſidente praeputio albis pilis veſtitum, ano proximum. *Praeputium* antrorſum villo largo barbatum.

Menſurae, e ſpecimine VI cum dimidia librarum, ſequenti modo habuerunt:

Latitudo ſepti narium inferius - - -	0′. 0″. 2‴.
—— —— inter nares - - -	0. 0. 1$\frac{1}{4}$.
Circumferentia oris - - - -	0. 2. 5.
Myſtaces longiſſimi - - - - -	0. 3. 4.
A naſi margine ad canthum oculi - -	0. 1. 0.
Apertura oculi ad - - - -	0. 0. 6.
Fiſſura palpebrarum - - - - -	0. 0. 9$\frac{1}{4}$.
A cantho poſtico ad auris marginem - -	0. 1. 0.
Circumferentia auris baſi a margine ad marginem exterius - - - -	0. 2. 8.

Altitudo aurium a capite - - - -	0l. 1ll. 7lll.
Circumferentia roſtri extremi ante myſtaces	0. 4. 0.
Eadem pone myſtaces - - - -	0. 4 2.
Capitis circumfer. inter oculos et aures -	0. 8. 2.
Eadem prope oculos - - -	0. 7. 3.
Diſtantia aurium per verticem - -	0. 2. 5.
Eadem per gulam - - - -	0. 4 3.
Oculorum canthi antici diſtant - -	0. 1. 1.
—— —— —— poſtici - -	0. 2. 5.
Margines aurium baſi inter ſe diſtant - -	0. 1. 4.
Longitudo totius animalis a ſummo naſo ad anum - - - -	1. 7. 3.
Longitudo capitis - - - - -	0. 4. 6.
Longitudo caudae ſine villo qui pollicaris ſuperminet - - - -	0. 9. 0.
Altitudo a ſcapulis ad calcem - -	0.10. 8.
Eadem a lumborum ſpina ad callos plantarum	0.11. 9.
Longitudo antibrachii - - -	0. 4. 5.
Antibrachii circumferentia baſi - - -	0. 3. 2.
Eadem verſus carpum - - - -	0. 2. 1.
Longitudo palmae extenſis falculis - - -	0. 3. 2.
Circumferentia carpi - - - - -	0. 2. 3.
Circumferentia infra pollicem - - -	0. 2. 5.
Mediorum digitorum metacarpus - -	0. 1 $\frac{1}{2}$.
Eorundem phalanx prima - - -	0. 0. 9$\frac{1}{2}$.
Phalanx ſecunda - - -	0 0. 6.
Pollicis phalanx - - - -	0. 0. 5.
Longit. falcularum antic. ſecundum curuaturam	0. 0. 8.
Latitudo earundem baſi - - -	0. 0. 2$\frac{1}{4}$.
Pollicis falcula longa - - - -	0. 0. 7.
Eadem lata - - - -	0 0. 3.

Long-

Longitudo verrucae carpi fere - - -	$0^{l}. 0^{ll}. 2^{lll}.$
Tibiarum longitudo - - - -	0. 4. 3.
Circumferentia earundem basi - - -	0. 5. 3.
Sed ad calcaneum - - - -	0. 2. 7.
Plantae longitudo - - - -	0. 4. 9.
Circumferentia metacarpi - - -	0. 2. 0.
Plantarum falculae per arcum - -	0. 0. $6\frac{1}{2}$.
Eaedem basi latae - - - -	0. 0. $2\frac{1}{2}$.
Longitudo colli - - - -	0. 1. 6.
Circumferentia colli - - -	0. 7. 5.
Thoracis circumferentia ad armos - -	0. 9 7.
In medio corpore - - - -	0.10. 9.
Abdominis ad femora - - -	0. 9.10.
Caudae circumferentia basi - - -	0. 2. 3.

*** *** ***

Dissectione inueni *pinguedinem* praesertim dorsum satis largiter incrustantem (in ponderosiore specimine ad 6^{lll}. et vltra crassitiem). *Omentum* pingue, fenestratum, intestina obtegens et complectens ad peluim vsque: *lamina* alia pinguissima a parte posteriore circumferentiae ventriculi vsque ad hepar adscendebat semicircularis, quae cum *omentulo* oblongo ex hypochondrio sinistro sub liene orto ventriculum totum obtegit atque fouet. Hepar maiore sui mole in dextro hypochondrio positum et lobo sinisterrimo supra ventriculum, vsque ad costarum sinistri lateris apices osseos pertingit. Ventriculus fundo suo diaphragmati obuersus, sacco versus regionem umbilicalem productus. Lien in sinistro hypochondrio, totus extra pinguedinem omenti accubat, longitudinalis. Ren dexter vertice altior,

altior, lumbique a renibus ad peluim copiosa pinguedine pulvinati. Intestinorum denique complexus vix vsque ad peluim extensus. — Et haec quoad situm viscerum sufficiant.

Palati rugae octonae. *Lingua* extrema disco spinulis setaceis, media parte supra tota vncinulis minus rigidis, confertis, versus raphen conuergentibus, basis villis mollibus reclinatis rarioribus et aliquot vtrinque fungis.

Ventriculus (praeter infundibulum pyloricum versus minorem arcum et cardiam recurvatum) ouiformis, paulo oblongatus, oesophago ad ipsum fundum inserto. A cardia ad sinum inflexionis antri pylorici $3''$. $2\frac{1}{2}'''$. inde ad pylorum $1''$. $8'''$. a pyloro per circumferentiam magnam ad cardiam vsque $10''$. $4'''$. Amplitudinis circumferentia in medio $8''$. sed antri pylorici ad inflexionem $3''$. $10'''$. et versus pylorum vix $2''$. $2'''$.

Intestinum tenue a pyloro ad coeci saccum tripedale cum 3 poll. Per tres vltimos pollices longitudinis appareret *tractus glandulosus*, secundum mesenterium hinc longitudinalis, a 3 ad 5 lin. latus et versus citeriorem extremitatem semel interruptus. *Areola* item *glandulosa* bipedali a pyloro distantia, ad alterum Ilei latus oualis, diametro maiore $6\frac{1}{2}'''$. Amplitudo int. tenuis subaequalis fere digiti seu $1''$. $10'''$.

In vtriusque ventriculo inter carnes, Ogotonae pilos et stramenta deuorata, Ascarides aliquot sesquipollicares,

res, rubentes aderant; at in duodeno tenuiores et minores albidae.

Craſſum inteſtinum ad Ilei inſertionem exemplatum, ſubito coarctatur in *coecum* conico-incuruum, apice obtuſo glanduloſo Ilei tractui applicatum, cuius tota longitudo ſeu profunditas, ab Ileo ad apicem, vix aequat $9\frac{1}{2}'''$. Circumferentia partis coli dilatatae $3''$. $5\frac{1}{2}'''$. Longitudo craſſi ſeu excrementitii inteſtini a coeci ſacco ad anum $12''$. $6'''$. circumferentia media $2''$. $7\frac{1}{2}'''$. itaque tractus alimentarii longitudo a cardia ad anum vix tripla eſt totius animalis.

Ad anum vtrinque prope marginem *glandula* acinoſa, ouali, faba maior, extus lutea, cauernulis ichore flauo ſcatens, quem orificio ad ipſum ani marginem hinc et inde conniuente eructat.

Hepar pendebat unc. ij. drachm. vß. ſeptilobatum: *Lobus ſiniſterior* amplior reliquis, ouali-oblongus, baſi ſubtus fiſſura, margine crenis aliquot. *Mediorum* 2. loborum *ſiniſterior* paruus, cordato acutus, interiore margine longitudinaliter inflexo, fiſſuraque ad baſin; *dexterior* maior, ouali-ſubquadrangulus, baſi adnatum habens *lobum paruum*, irregulariter compreſſum angulatumque, inter quem et ipſum lobum adnectitur. *Cyſtis* vacua, craſſa tunica conſtans, quam intus bilis fulua, mucoſa incruſtabat. *Lobus* porro *dexter* ſemicordatus, ſubtus carinatus, eique adſidet lobus *renalis* irregularis mucronatus. Septimus denique *Spigelianus* linguiformis, altero latere obtuſe carinatus.

Lien linearis, tripollicari longior, altero extremo dilatatus, formaque pedis inflexus et ipso angulo crenis lobatus; pondere sesquidrachmae cum granis sex.

Renum dexter fere sesquidrachmalis, sinister xiij granis ponderosior; vterque hylo obsoleto, intus crista continua arguta loco papillarum. *Vesica* oualis magna, ad 3 pollicum vltraque extenditur longitudinem.

Penis corpus tantum $1''$. $4'''$. simul cum *glande* cylindrica $2\frac{1}{2}'''$. longa, obtusa, apice glabra, circa basin papillis sparsis mollibus submuricata. *Osficulum* intra apicem $1\frac{1}{2}'''$.

In SCELETO: *Cranium* a margine alueolari ad occiput $3''$. $3\frac{1}{2}'''$. aequat; latitudo inter orbitas $9'''$. *Mandibulae* longitudo ab alueolis ad condylos $2''$. $3'''$.

Dentes canini profunde sulcati; *primores*, vt solent, minuti, obtusi, infra alterni. *Molares* a caninis insigni spatio remoti, nullis interiectis paruulis denticulis: *supra* vtrinque bini, quorum posterior maximus, *subtus* terni, e quibus prior omnibus reliquis minor.

Vertebrae dorsales numero XIII. lumbares VII. sacri III. caudae XX. praeter apicem cartilagineum. Colli septima vertebra processu spinoso insignis, ac dorsalibus minore. Dorsi secundae spina longissima $9'''$. — Tota collarium vertebrarum series $2''$. $10'''$. dorsalium $5''$. $5'''$. lumbarium $5''$. $2'''$. sacrum $6'''$. longitudine aequant.

Sterni

Sterni portiones intermediae, praeter manubrium et enſem, ſex; hinc tredecim *coſtarum*, nonem *vera* articulatione ſterno inſertae: primum par manubrio medio, hinc ſex paria ſymphyſibus manubrii atque ſex vertebrarum ſterni; denique duo paria cartilaginibus ſuis ipſi commiſſurae ſextae vertebrae cum enſe ſterni inſerta. E *ſpuriis* tres priores cartilaginibus per ligamenta connexae, vltima muſculis inhaeret.

Clauiculae exiles ſub margine muſculorum pectoralium maiorum ſuperiore, in regione maſtoidei fluctuantes, leuiter arcuatae, depreſſae, extremitate humerali cartilagine ſubcapitatae, longitudine, cum incruſtante cartilagine, 6^{III}.

Scapulae longitudo $2^{II}. 11^{III}$. ſumma latitudo $1^{II}. 7^{III}$. *Humeri* longit. $4^{I}. 1\frac{1}{2}^{III}$. *Cubiti* ab olecrano ſummo $4^{II}. 1^{III}$. olecrani $6\frac{1}{2}^{III}$.

Oſſis innominati longitudo $2^{II}. 11^{III}$. *ilei* $1^{II}. 7^{III}$. *foraminis* ouali $8\frac{1}{2}^{III}$. eiusdem latitudo $6\frac{2}{3}^{III}$. et ſymphyſeos $8\frac{1}{4}^{III}$. *Femoralis* oſſis longitudo $4^{II}. 1\frac{1}{2}^{III}$. *tibiae* $4^{II}. 2\frac{1}{2}^{III}$. *calcanei* $10\frac{1}{4}^{III}$.

Hyodei oſſis baſis recta $4\frac{1}{4}^{III}$. *Cornua* maior atriarticulata, primo articulo antrorſum directo $2\frac{2}{3}^{III}$. ſecundo transuerſo $4\frac{1}{2}^{III}$. tertio retrorſum obliquo $4\frac{1}{5}^{III}$. apice ſubcapitato trunculo. Cornua *minora* conica, vix 1^{III}. longa ſunt.

IRIS GÜLDENSTAEDTIANA.

DESCRIPTA.

Ab

IOANNE LEPECHIN.

Inter varias plantarum ſpecies nouas, quibus nunc Flora Roſſica ſuperbit, quasque induſtria Academicorum remotiſſimas Roſſiae regiones peragrantium detexit, et pulcrum Ireos genus tanta incrementa acquiſuit, vt fere ad dimidium numero ſit auctum. His nunc addo ſpeciem Ireos nouam, quae ex ſeminibus a collega noſtro celeberrimo nunc pie defuncto *Güldenſtaedtio*, ſub nomine ſeminum Ireos deſertorum mihi communicatis in horto Academico prouenit, floruit et nunc etiam lacte viget, illiusque denominationem ſpecificam, ab inuentore ipſius, vt debitas ipſi perſoluam grates, mutuari, et *Iridem Güldenſtaedtianam* vocare placet. Eſt que illa Iris corillis imberbibus, petalis interioribus ſtigmate maioribus, arctis, caule tereti, foliis enſiformibus, non foetidis, germinibus ſexangularibus.

Deſcriptio.

Radix horizontalis, parum inclinata, tuberoſo articulata, tuberibus oblongis, circulis eminentibus notatis, quorum margo, caulem reſpiciens, ciliatus eſt; ſubdiuiſa multo-

ties

ties ſub angulo acuto, areasque ſat amplas circulares efficiens. Extus velata epidermide tenui brunnei coloris et cortice ſat craſſo albido. Caro ſpongioſa, pallide flaueſcens, ſapore acridulo, amaricante, dein in faucibus ſenſum ardoris diu cauſante. Vnaquaeque radicis ſubdiuiſura demittit fibrillas plurimas, ſimplices, extus velamine albo ſat molli atque turgidiuſculo tectas, intus rigidas, ſetaceas, aetate prouectiores brunneas, iuniores albidas.

Singulae radicis diuiſurae emittunt caulem erectum, teretem, glaberrimum, foliis longiorem, nodis vt plurimum ſex, inferioribus foliiferis, ſuperioribus floriferis.

Folia ad radicem per paria oppoſita, interne vaginantia, arcte appreſſa, medium cauſem aequantia, tempore marceſcentia. Ad caulem ſita enſiformia, forma foliorum Pſeudacori, multo tamen anguſtiora, alterna, erecta, ſtriata, ſtriis laeuibus, baſi articulum caulis includentia, caulem que ad dimidium inter articulos vaginantia, apicibus faſtigiatis vix exortum florum attingentia; nullo odore praedita.

Spathae turgidulae oblongae, includentes duas, vt plurimum, minores. flores diſtinguentes, biualues, exteriore valua maiore ad petalorum vngues adſcendente, interiore minori areſcente.

Flores inodori, pedunculati, pedunculo erecto, tereti, longitudine germinis; corolla petalis pallide flauis, alternis, exterioribus patentioribus, vltra medium coarctatis, deſinentibus in laminam ex oblongo ouatam, non raro irregulariter emarginatam et inflexam; petala interiora breuiora et anguſtiora, erecta, lanceolata, rarius emarginata.

Stamina petalorum exteriorum vngui inſerta; filamenta linearia, antherae oblongae, longitudine filamento-

rum, polline flauo, fultus in parte piſtillo aduerſa ſulcis quatuor notatae.

Germen oblongum hexagonum, ſulcis profundis. Stylus columnaris, capitatus, ſtigma tripartitum, petaloideum, patens, longitudine ad laminam petalorum exteriorum, quibus ſepae incumbit, excurrens, apice vel emarginatum, non raro dentatum. Capſula ventricoſa, oblonga, hexagona, angulis per paria approximatis, triloculoris, ordinibus ſeminum in quolibet loculamento binis.

Semina depreſſa, margine hinc recto, illuc ſemilunari, arillo brunneo, niteute. Deſcripta nunc ireos ſpecies prope accedit ad *iridem Spuriam* Linn. quam celeber jaqun in flora Auſtriaca. T. 4. viuis coloribus depictam ſiſtit. Differt tamen ab illa ſpathis magis turgidis et longioribus, floribus minus nutantibus, ſed erectiuſculis, colore petalorum pallide flauo, laminis anguſtioribus et magis elongatis, quam rotundatis, radice non tam lacera, vt icon jaquniana ſiſtit, ſed magis tuberoſa et ſolidiore, foliis inodoris non fœtentibus. Sponte, teſte pie defuncto *Güldenſtaedt*, prouenit in deſertis circa Terec ad fabulosas fluuiorum ripas.

Tab. VIII Figur. 1. Siſtit caulem floriferum.
— 2. Florem ſeparatum expanſum.
— 3. Petalum cum ſtamine.
— 4. Partem ſtigmatis.
— 5. Partem caulis cum capſula integra.
— 6. Capſulam diſſectam, vt loculi cum ſeminibus appareant.
— 7. Semen
— 8. Radicem cum fibrillis.

ASTRONOMICA.

DE

PERTVRBATIONE MOTVS PLANETARVM ET COMETARVM.

Auctore

L. EVLERO.

PRAENOTANDA.

§. 1.

Vis acceleratrix, qua corpus coeleſte, cuius maſſa $= M$, aliud corpus, ad diſtantiam $= v$ remotum, ad ſe attrahit, tali formula: $\frac{M}{vv}$, exprimi ſolet; quandoquidem omnia corpora coeleſtia in ratione compoſita ex directa maſſarum et reciproca duplicata diſtantiarum agere obſeruantur. Vt nunc hanc formulam ad menſuras determinatas atque adeo valores numericos reuocemus, in ſequentibus perpetuo maſſam Solis vnitate deſignabimus. Deinde vero diſtantia media Terrae a Sole pariter vnitate definiatur. Hoc enim modo formula $\frac{M}{vv}$ omnibus caſibus certo numero repraeſentabitur.

§. 2. Quod deinde ad *menſuram temporis* attinet, eam quoque ex motu Terrae medio ita perpetuo exhibebimus, vt omnia tempora per angulos, quos Terra interea ſecundum motum medium circa Solem deſcribit, exprimamus. Ita menſura vnius diei nobis erit angulus $= 59', 8''$; integri autem anni tropici menſura erit $360°$.

§. 3. His menſuris ſtabilitis, ſi corpus quodpiam coeleſte quieſcens aliud corpus ſecundum lineam rectam ad ſe attrahat, eiusque diſtantia quodam tempore indefinito, quod ſit $= \theta$, ponatur $= v$, eius motus hac aequatione differentio-differentiali determinabitur: $\frac{d\,dv}{d\theta^2} = -\frac{M}{vv}$; vbi elementum temporis $d\theta$ conſtans eſt aſſumtum.

§. 4. Quoniam hic de perturbationibus motus tam planetarum quam cometarum potiſſimum erit ſermo, vis principalis, qua haec corpora ſollicitantur, erit ea, qua a Sole attrahuntur; vnde ſi talis corporis a Sole diſtantia fuerit $= v$, iſta vis erit $= \frac{1}{vv}$. Reliquas autem vires omnes, quibus haec corpora forte vrgentur, nomine *virium perturbatricium* denotabimus, quas plerumque tanquam valde paruas reſpectu vis ad Solem tendentis ſpectare licebit, quandoquidem, ſi maiores eſſent, nulla adhuc methodus eſt inuenta, tales motus ad calculum reuocandi.

§. 5. Quia porro loca talium corporum ad quoduis tempus reſpectu Solis definiri debent, ipſum Solem in perpetua quiete conſiderari conuenit; quamobrem ſecundum principia mechanica omnes vires acceleratrices, quae in Solem agunt, ſecundum directiones contrarias in ipſum corpus, cuius motus quaeritur, transferri oportet, quibus hoc

hoc corpus perinde ſollicitari erit cenſendum, atque ab illis viribus, quarum actioni immediate ſubiicitur.

§. 6. Cum igitur centrum Solis tanquam punctum fixum in coelo ſimus contemplaturi, quod ſit in O, per id ternos axes fixos O A, O B, O C ductos concipiamus, qui inter ſe ſint normales. Iis igitur tria plana principalia determinabuntur, ſcilicet A O B, A O C, B O C, pariter inter ſe normalia; quorum primum A O B planum nobis eclipticae repreſentet, quandoquidem omnia loca tam planetarum quam cometarum ad eclipticam referre ſolemus. Tab. IX. Fig. 1.

§. 7. Tam poſtquam a certa epocha elapſum fuerit tempus $= \theta$, modo ſupra aſſignato exprimendum, reperiatur planeta ſiue cometa, cuius motus quaeritur, in loco quocunque Z; hincque primo ad planum A O B demittatur perpendiculum Z Y; tum vero ex Y ad axem O A agatur normalis Y X, ita vt locus Z determinetur per ternas coordinatas tribus axibus modo ſtabilitis parallelas, quas vocemus $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$. Praeterea vero quoque ducamus ad centrum Solis rectam Z O, quae vocetur $= v$, ita vt ſit $vv = xx + yy + zz$. Quod ſi porro ſpatiolum tempusculo $d\theta$ percurſum breuitatis gratia vocetur $= ds$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

§. 8. A quibuscunque nunc viribus acceleratricibus corpus in loco Z ſollicitetur, cum iis primo coniungantur ſecundum directiones contrarias omnes vires ipſum Solem ſollicitantes; tum vero omnes iſtae vires reſoluantur ſecundum ternas illas directiones Z P, Z Q et Z R ipſis axibus O A, O B, O C parallelas, easque hoc modo

denominemus: vim $ZP = p$, vim $ZQ = q$, et vim $ZR = r$; quae ergo litterae, p, q, r omnes exhibent vires perturbatrices noſtrum corpus ſollicitantes, dum vis principalis ad ſolem directa ſecundum ZO eſt $= \frac{1}{vv}$.

§. 9. Iam quicunque fuerit corporis motus, is pariter more ſolito ſecundum ternas directiones ZP, ZQ et ZR reſoluatur. Deinde vero etiam ipſa vis Solis ſecundum easdem directiones reſoluta dabit:

vim ſecundum $PZ = \frac{x}{v^3}$,
vim ſecundum $QZ = \frac{y}{v^3}$,
vim ſecundum $RZ = \frac{z}{v^3}$.

Hinc ſi triplex corporis motus ſecundum praecepta mechanica tractetur, inde tres ſequentes aequationes differentiales ſecundi gradus naſcentur:

I. $\frac{d\,d\,x}{dt^2} = -\frac{x}{v^3} + p$.
II. $\frac{d\,d\,y}{dt^2} = -\frac{y}{v^3} + q$.
III. $\frac{d\,d\,z}{dt^2} = -\frac{z}{v^3} + r$.

ex quibus aequationibus totus corporis motus debet determinari.

Euolutio.

trium aequationum inuentarum.

§. 10. Cum iſtae aequationes ſint differentiales ſecundi gradus, ante omnia in id eſt incumbendum, vt ex iis per integrationem aequationes differentiales primi gradus deriuemus, in quo quidem negotio ad quantitates p, q, r, reſpici

reſpici nequit, quibus igitur ſignum integrationis praefigemus, easdemque operationes inſtituemus, quaſi hae quantitates plane abeſſent. Statim autem ob elementum $d\theta$ conſtans iſtae tres combinationes:

$$\text{II}.x - \text{I}.y;\ \text{III}.y - \text{II}.x;\ \text{I}.z - \text{III}.x;$$

nobis praebebunt ſequentes aequationes integrabiles:

1. $\frac{x\,d\,d\,y - y\,d\,d\,x}{d\theta^2} = qx - py,$
2. $\frac{y\,d\,d\,z - z\,d\,d\,y}{d\theta^2} = ry - qz,$
3. $\frac{z\,d\,d\,x - x\,d\,d\,z}{d\theta^2} = pz - rx.$

§. 11. Quanquam autem hoc modo tres nouas nacti ſumus aequationes: tamen eae inter ſe ita cohaerent, vt binae quaeuis tertiam in ſe inuoluant. Si enim earum prima ducatur in z, ſecunda vero in x, producta in vnam ſummam collecta dabunt hanc aequationem:

$$\frac{xy\,d\,d\,z - zy\,d\,d\,x}{d\theta^2} = y(rx - pz),$$

quae per $-y$ diuiſa ipſam tertiam aequationem manifeſto producit; ita vt, vti iam annotauimus, quaelibet in binis reliquis iam contineatur; vnde etiam hae tres aequationes duas tantum determinationes ſuppeditabunt.

§. 12. Ante autem quam has aequationes integremus, plurimum intererit obſeruare, formulas $qx - py$, $ry - qz$, $pz - rx$, certa momenta virium p, q, r exprimere. In prima enim eorum productum qx exprimit momentum vis q reſpectu axis X in ſenſum AB; alterum vero productum py momentum vis p reſpectu eiusdem axis X, at in ſenſum contrarium BA. Quare cum tertia vis r huic axi X ſit parallela, ab ea

nullum momentum respectu istius axis oritur; vnde momentum ab omnibus istis viribus, axis X respectu, in sensum A B tendens erit $q x - p y$. Simili modo ab iisdem viribus nascetur momentum respectu axis O A, in sensum B C $= r y - q z$. Ac denique momentum ab iisdem viribus ortum respectu axis O B in sensum C A erit $= p z - r x$.

§. 13. Quoniam haec momenta maxime sunt notatu digna, ea merentur in calculum introduci. Designemus igitur ea litteris maiusculis C, A, B, quae ab axibus ipsis, ad quos referuntur sunt desumta; ideoque ponamus: $q x - p y = C$, $r y - q z = A$, $p z - r x = B$, vbi cauendum erit, ne istae litterae pro constantibus habeantur. Hinc igitur ternae aequationes integrandae erunt:

1. $\frac{x\,d\,d\,y - y\,d\,d\,x}{d\,\theta^2} = C$,
2. $\frac{y\,d\,d\,z - z\,d\,d\,y}{d\,\theta^2} = A$,
3. $\frac{z\,d\,d\,x - x\,d\,d\,z}{d\,\theta^2} = B$.

quae ductae in $d\,\theta$ et integratae dabunt

1. $\frac{x\,d\,y - y\,d\,x}{d\,\theta} = \int C\,d\,\theta$,
2. $\frac{y\,d\,z - z\,d\,y}{d\,\theta} = \int A\,d\,\theta$,
3. $\frac{z\,d\,x - x\,d\,z}{d\,\theta} = \int B\,d\,\theta$.

vbi vero etiam probe tenendum est, binas harum aequationum iam tertiam inuoluere. At vero sequens combinatio: I. $x +$ II. $y +$ III. z praebet

$$0 = z \int C\,d\,\theta + x \int A\,d\,\theta + y \int B\,d\,\theta,$$

quae aequatio quidem pro identica est habenda; interim tamen egregiam proprietatem nobis cognoscendam praebet,

prae-

praecipue si cum ea combinetur, qua modo ante vidimus esse $\mathfrak{C}z + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y = 0$, quae reuera est identica.

§. 14. Antequam vlterius progrediamur, consideremus casum, quo vires perturbatrices euanescunt, et formulae integrales in quantitates constantes abeunt, quae sint secundum ordinem $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, ex quibus valoribus vltima aequatio nobis praebebit $\mathfrak{C}z + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y = 0$, quae aequatio nobis statim indicat, totam orbitam a corpore z descriptam ita per ternas coordinatas x, y, z, definiri, vt perpetuo sit $\mathfrak{C}z + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y = 0$, quae aequatio est pro superficie plana; ita vt iam certi simus, hoc casu corpus totum suum motum in eodem plano fore absoluturum. Vnde iam intelligere licet, quomodo motus corporis ob vires perturbatrices a plano discrepare queat.

§. 15. Porro vero etiam formulae differentiales per integrationem inuentae, scilicet:

$$x\,dy - y\,dx,\ y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,$$

peculiari attentione sunt dignae, cum referantur ad proiectiones orbitae descriptae in terna plana principalia factas. Si enim orbita in planum A O B proiiciatur, pro qua x et y erunt binae coordinatae, tum elementum areae circa punctum O descriptae erit $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$, in sensum A B. Simili modo $\frac{1}{2}(y\,dz - z\,dy)$ erit elementum proiectionis in planum B O C factae, idque in sensum B C. Denique $\frac{1}{2}(z\,dx - x\,dz)$ erit elementum areae proiectionis in planum C O A facta, idque in sensum C A. Vnde patet, quam egregie descriptio harum arearum a momentis virium respectu axium respondentium pendeat. Si enim vi-

res

res p, q, r euanescerent, haec arearum elementa tempusculo $d\theta$ forent proportionalia, vti ex primis elementis iam constat. Quatenus igitur vires perturbatrices adsunt, eatenus descriptio arearum non amplius erit tempori proportionalis.

Tab. IX. Fig. 2.

§. 16. Quo iste pulcherrimus nexus inter descriptiones arearum et momenta virium clarius perspiciatur, sit A Y B proiectio orbitae a corpore Z descriptae in planum A O B facta, in qua punctum Y respondet loco corporis Z, pro quo erunt coordinatae $OX = x$, $XY = y$. Iam ducta recta O Y sector A O Y exhibebit aream in hac proiectione descriptam, quam ergo vocemus $= S$, quae quia constat ex triangulo O X Y et area A X Y, vocemus $AX = t$, vt obtineatur ista area $AXY = \int y\,dt$; eritque $S = \frac{1}{2}xy + \int y\,dt$; vnde differentiando, ob $x + t = OA$, ideoque constans, erit $dt = -dx$; hincque colligitur elementum areae $dS = \frac{1}{2}x\,dy - \frac{1}{2}y\,dx$; vnde patet fore $x\,dy - y\,dx = 2\,dS$.

§. 17. Pro hac igitur proiectione habebimus

$$\frac{2\,dS}{d\theta} = \int C\,d\theta,$$

vbi C denotat momentum virium sollicitantium respectu axis O C plano A O B perpendiculariter insistentis, ideoque formula integralis $\int C\,d\theta$ summam omnium horum momentorum per tempus θ collectorum denotabit; at formula $\frac{dS}{d\theta}$ repraesentabit celeritatem, qua area S describitur; vnde eius differentiale per $d\theta$ diuisum dabit accelerationem, quae ergo erit $\frac{d\,dS}{d\theta^2} = \frac{1}{2}C$. Sicque intelligitur, accelerationem motus, quo area S describitur, ipsi momento

mento virium C esse proportionalem. Quamdiu ergo hoc momentum C positiuum tenet valorem, celeritas descriptionis continuo crescit: contra autem, quando momentum fit negatiuum, iterum decrescit. Haec etiam sunt intelligenda de binis reliquis proiectionibus.

Vlterior euolutio formularum integralium modo inuentarum.

§. 18. Cum igitur deducti simus ad istas aequationes:

1. $\frac{x\,dy - y\,dx}{d\theta} = \int C\,d\theta.$
2. $\frac{y\,dz - z\,dy}{d\theta} = \int A\,d\theta.$
3. $\frac{z\,dx - x\,dz}{d\theta} = \int B\,d\theta,$

existente $C = qx - py$, $A = ry - qz$, $B = pz - rx$, ideoque $Cz + Ax + By = 0$, vidimus praeterea semper fore

$$z\int C\,d\theta + x\int A\,d\theta + y\int B\,d\theta = 0,$$

qua aequatione vtique certa relatio inter coordinatas x, y, z, et elementum temporis $d\theta$ inuoluitur; eius vero differentiale, ob $Cz + Ax + By = 0$, nobis hanc nouam relationem suppeditat:

$$dz\int C\,d\theta + dx\int A\,d\theta + dy\,B\int d\theta = 0,$$

quae pariter omni attentione est digna.

§. 19. Quoniam tres aequationes inuentae ad ternos nostros axes principales, siue potius ad terna plana principalia referuntur, sequenti modo ex iis formari poterit noua aequatio, in qua ad distinctionem horum pla-

norum plane non respicitur; ita scilicet vt ternae coordinatae x, y, z penitus ex calculo elidantur, earumque loco sola distantia $OZ = v$ cum elemento curuae descriptae, quod vocauimus

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)},$$

in calculo relinquatur. Obtinebitur hoc, si quadrata trium aequationum inuicem addantur, quod quo facilius fieri poterit, ponamus breuitatis gratia

$$\int A\,d\theta = P,\ \int B\,d\theta = Q,\ \int C\,d\theta = R,$$

et aequatio resultans erit

$$(x\,dy - y\,dx)^2 + (y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 = d\theta^2 (P^2 + Q^2 + R^2).$$

§. 20. Quodsi nunc ista aequatio euoluatur, ob

$$xx + yy + zz = vv \text{ fit}$$
$$xx + yy = vv - zz;$$
$$xx + zz = vv - yy \text{ et}$$
$$yy + zz = vv - xx;$$

et hinc peruenietur ad istam aequationem:

$$vv\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 = d\theta^2 (P^2 + Q^2 + R^2),$$

vbi cum fit

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 \text{ et } x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv,$$

aequatio inuenta hanc induet formam:

$$vv\,ds^2 - vv\,dv^2 = d\theta^2 (P^2 + Q^2 + R^2).$$

Tab. IX. Fig. 3. §. 21. Quo indolem huius aequationis penitius perspiciamus, consideremus elementum a corpore tempusculo $d\theta$ descriptum, quod sit $Zz = ds$; vnde ductis ad solem rectis ZO et zO erit $OZ = v$ et $Oz = v + dv$. Hinc

Hinc centro O ducto arculo $Z v$, vt ſit $v z = d v$, erit vtique $Z v^2 = d s^2 - d v^2$, hincque aequatio inuenta erit

$$v v . Z v^2 = d \theta^2 (P^2 + Q^2 + R^2).$$

Vocemus nunc angulum elementarem $Z O z = d \Phi$, ita vt $d \Phi$ denotet angulum a corpore Z tempuſculo $d \theta$ circa ſolem deſcriptum, quod eſt elementum in Aſtronomia maximi momenti, eritque $Z v = v d \Phi$, vnde noſtra aequatio erit

$$v^4 d \Phi^2 = d \theta^2 (P^2 + Q^2 + R^2),$$

at extracta radice

$$v v d \Phi = d \theta \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}.$$

§. 22. Euidens autem eſt, hanc formulam $v v d \Phi$ exprimere duplam aream ſectoris elementaris $Z O z$, quae ergo ſi ponatur $= d S$, habebitur elementum areae, quod corpus motu vero circa ſolem tempuſculo $d \theta$ deſcribit, ita vt ſit $2 d S = d \theta \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}$; quae aequatio ſi comparetur cum deſcriptione arearum in proiectionibus ſupra explicata, facile intelligitur, ſi momentum virium ſollicitantium reſpectu axis ad planum $Z O z$ perpendicularis ponatur $= M$, eſſe debere $2 d S = \int M d \theta$; vnde tuto concludimus fore

$$\int M d \theta = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)},$$

cuius rei veritas infra clarius oſtendetur. Aequatio ergo hinc eruta erit

$$v v d \Phi = d \theta \int M d \theta.$$

§. 23. Ad hoc autem vtile erit, relationem inter momenta virium A, B, C, ipſasque vires, accuratius

examinare; et quoniam, si momenta vt cognita spectare velimus, ex tribus aequationibus

$$A = ry - qz,\ B = pz - rx \text{ et } C = qx - py,$$

ipsas vires p, q, r definire non licet, in subsidium vocemus nouam quandam aequationem, quae sit

$$px + qy + rz = kv,$$

ita vt $k = \frac{px+qy+rz}{v}$ exprimat vim ex viribus p, q, r, secundum directionem Oz resultantem; vnde cum ex priori superiorum aequationum sit $r = \frac{pz-B}{x}$, ex tertia vero $q = \frac{py+C}{x}$, hi valores in noua aequatione substituti praebent

$$p = \frac{kvx + Bz - Cy}{xx + yy + zz}, \text{ siue}$$

$$p = \frac{kvx + Bz - Cy}{vv}.$$

Hincque porro colligetur:

$$q = \frac{kvy + Cx - Az}{vv} \text{ et } r = \frac{kvz + Ay - Bx}{vv}.$$

§. 24. His valoribus inuentis contemplemur etiam vim resultantem pro ipsa directione motus, quae vocari solet vis tangentialis. Sit igitur ea $= t$, eritque

$$t = \frac{p\,dx + q\,dy + r\,dz}{ds},$$

vbi valores modo inuenti, si substituantur, praebent

$$vvt\,ds = kv(x\,dx + y\,dy + z\,dz) + A(ydz - zdy) + B(zdx - xdz) + C(xdy - ydx).$$

Cum nunc sit

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv;$$

tum vero

$$ydz - z\,dy = d\theta \int A\,d\theta,\ zdx - x\,dz = d\theta \int B\,d\theta \text{ et}$$
$$x\,dy - y\,dx = d\theta \int C\,d\theta,$$

his

his substitutis erit

$$vvtds = kvvdv + A\,d\theta\int A\,d\theta + B\,d\theta\int B\,d\theta + C\,d\theta\int C\,d\theta,$$

ideoque

$$t\,ds = k\,dv + \frac{A\,d\theta\int A\,d\theta + B\,d\theta\int B\,d\theta + C\,d\theta\int C\,d\theta}{vv}.$$

§. 25. Cum igitur supra posuerimus $\int A\,d\theta = P$, $\int B\,d\theta = Q$, $\int C\,d\theta = R$, his valoribus introductis habebimus

$$t\,ds = k\,dv + \frac{P\,dP + Q\,dQ + R\,dR}{vv}$$

ita vt hinc sit

$$P\,dP + Q\,dQ + R\,dR = vvtds - kvvdv$$

vnde integrando colligitur

$$PP + QQ + RR = 2\int vv(t\,ds - k\,dv).$$

Quae ergo supra de hac formula $PP + QQ + RR$ annotauimus, vbi littera M designauit momentum virium respectu axis ad orbitam normalis, nunc eo redeunt, vt sit

$$(\int M\,d\theta)^2 = 2\int vv(t\,ds - k\,dv),$$

vnde differentiando discimus esse

$$M\,d\theta\int M\,d\theta = vv(t\,ds - k\,dv),$$

vnde patet, quomodo istud momentum M tam a vi tangentiali t, quam a vi centrali, siue ad O directa, quae erat $= k$, pendeat.

Inuestigatio aliarum aequationum integralium.

§. 26. Cum motus corporis quaesitus determinetur tribus aequationibus, integralia autem, quae hactenus

inuenimus, duas tantum determinationes complectantur, omnino neceſſe eſt, vt inſuper vna aequatio integralis ex ternis aequationibus initialibus eruatur. Talem autem nobis ſuppeditabit iſta combinatio:

$$\text{I. } 2\,dx + \text{II. } 2\,dy + \text{III. } 2\,dz,$$

ſic enim prodibit

$$\frac{2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy + 2\,dz\,ddz}{d\theta^2} = -\frac{2\,x\,dx + 2\,y\,dy + 2\,z\,dz}{v^3} + 2\,p\,dx + 2\,q\,dy + 2\,r\,dz,$$

vbi cum ſit

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 \text{ et}$$
$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv,$$

per integrationem impetrabimus hanc aequationem:

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = +\frac{2}{v} + 2\int(p\,dx + q\,dy + r\,dz)$$

vbi ſignum ſummationis iam conſtantem per integrationem ingreſſam inuoluit.

§. 27. Modo ante autem vidimus, ſi vis tangentialis, ſecundum directionem motus Z z ſollicitans, vocetur $= t$, fore $t\,ds = p\,dx + q\,dy + r\,dz$. Ex hac igitur vi tangentiali habebimus:

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{2}{v} + 2\int t\,ds;$$

vbi $\frac{ds^2}{d\theta^2}$ exprimit quadratum celeritatis, qua corpus Z hoc tempore mouetur. Hinc autem loco ipſius elementi ds introducamus potius angulum elementarem $d\Phi$, per quem corpus interea circa Solem progreditur, et, quemadmodum iam ſupra vidimus, erit $ds^2 = dv^2 + v\,v\,d\Phi^2$, quo valore ſubſtituto noſtra aequatio fiet:

$$\frac{dv^2 + v\,v\,d\Phi^2}{d\theta^2} = \frac{2}{v} + 2\int t\,ds.$$

Haec

Haec itaque eſt tertia aequatio integralis, quae cum praecedentibus coniuncta vniuerſam problematis ſolutionem continet eſt cenſenda.

§. 28. Quod ſi hanc aequationem cum ea, quam in articulo praecedente vltimo loco inuenimus, qua erat $v\,v\,d\Phi = d\theta \int \mathrm{M}\,d\theta$, exiſtente

$$\int \mathrm{M}\,d\theta = \mathrm{V}\,2\int v\,v\,(t\,ds - k\,dv),$$

coniungamus, duas habebimus aequationes inter ternas variabiles v, θ et Φ, vnde per quamlibet binas reliquas definire licebit. Si enim breuitatis gratia ponamus

$$v\,v\,d\Phi = \mathrm{S}\,d\theta \text{ et}$$
$$dv^2 + v\,v\,d\Phi^2 = \tfrac{2\,d\theta^2}{v} + \mathrm{T}\,d\theta^2,$$

ita vt ſit

$$\mathrm{S} = \int \mathrm{M}\,d\theta \text{ et } \mathrm{T} = 2\int t\,ds;$$

ex priore habebimus $d\Phi = \frac{\mathrm{S}\,d\theta}{v\,v}$, qui valor in altera ſubſtitutus dat

$$dv^2 + \tfrac{\mathrm{SS}\,d\theta^2}{v\,v} = \tfrac{2\,d\theta^2}{v} + \mathrm{T}\,d\theta^2,$$

vnde deducitur

$$d\theta = \frac{v\,dv}{\sqrt{(2v + \mathrm{T}\,v\,v - \mathrm{SS})}}, \text{ hincque}$$
$$d\Phi = \frac{\mathrm{S}\,dv}{v\sqrt{(2v + \mathrm{T}\,v\,v - \mathrm{SS})}}.$$

§. 29. Poſſumus autem inſuper aliam aequationem integralem elicere, ope combinationis I. x + II. y + III z, quippe quae dat

$$\frac{x\,dd\,x + y\,dd\,y + z\,dd\,z}{a\,\theta^2} = -\tfrac{1}{v} + p\,x + q\,y + r\,z$$
$$= -\tfrac{1}{v} + k\,v.$$

Huic

Huic addamus aequationem modo inuentam, (vide §. 26.) quae erat

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{d\theta^2} = \frac{2}{v} + 2\int(p\,dx + q\,dy + r\,dz)$$
$$= \frac{2}{v} + 2\int t\,ds$$

ac manifeſtum eſt proditurum eſſe hanc aequationem:

$$\frac{d.(x\,dx+y\,dy+z\,dz)}{d\theta^2} = \frac{d.v\,dv}{dt^2} = \frac{1}{v} + k\,v + 2\int t\,ds,$$

quae aequatio tantum continet variabiles t et θ, et denuo integrabilis redditur multiplicando per $2\,v\,dv$: integrale enim erit:

$$\frac{v\,v\,dv^2}{d\theta^2} = 2\,v + 2\int k\,v\,v\,dv + 4\int v\,dv\int t\,ds,$$

hincque elicitur

$$d\theta = \frac{v\,dv}{\sqrt{(2\,v + 2\int k\,v\,v\,dv + 4\int v\,dv\int t\,ds)}},$$

quae ergo formula cum ſuperiore §. 28. inuenta congruere debet. Comparatione autem facta erit

$$\mathbf{T}\,v\,v - \mathrm{S}\,\mathrm{S} = 2\int k\,v\,v\,dv + 4\int v\,dv\int t\,ds;$$

vbi ſi differentietur et loco $\mathbf{T}$ et $d\,\mathbf{T}$ valor ante aſſumtus ſcribatur, prodibit

$$2\,k\,v\,v\,dv = 2\,v\,v\,t\,ds - d.\,\mathrm{S}\,\mathrm{S}.$$

Vidimus autem eſſe

$$\mathrm{S}\,\mathrm{S} = (\int \mathrm{M}\,d\theta)^2 = 2\int v\,v\,(t\,ds - k\,dv)$$

ideoque

$$d.\,\mathrm{S}\,\mathrm{S} = 2\,v\,v\,t\,ds - 2\,k\,v\,v\,dv,$$

quo ſubſtituto aequatio manifeſto prodit identica.

Inue-

Inuestigatio
lineae nodorum et inclinationis orbitae ad eclipticam.

§. 30. Iam initio obseruauimus, si vires p, q, r euanescerent, tum totam corporis orbitam sitam fore in eodem plano. Ob actionem autem harum virium fieri poterit, vt orbita non amplius reperiatur in eodem plano, cuius variatio commodissime repraesentari solet tam per lineae nodorum quam inclinationis orbitae ad eclipticam positionem. Si enim haec duo elementa ad quoduis tempus assignari queant, perfectam notitiam habemus super continua orbitae variatione.

§. 31. Cum igitur Planeta vel Cometa nunc in Z reperiatur, et temporis elemento $d\theta$ percurrat elementum suae orbitae $Z\zeta$, concipiatur planum, quod per puncta Z, ζ et O transeat, quandoquidem corpus interea in hoc plano mouebitur. Sit igitur recta O N intersectio istius plani cum plano eclipticae A O B, quae recta vocari solet linea nodorum, pro cuius praesenti positione vocemus angulum $A O N = \zeta$; praeterea vero vocetur inclinatio huius plani ad eclipticam $= \eta$, et statuatur angulus $N O Z = \psi$, qui vulgo vocari solet argumentum latitudinis; angulus vero elementaris $Z O \zeta$ maneat vt hactenus posuimus $= d\Phi$, ita vt, si linea nodorum O N quiesceret, vtique foret $d\Phi = d\psi$. Quatenus autem haec linea ipsa mouetur, haec aequalitas non amplius locum habet. Tab. IX. Fig. 4.

§. 32. Ducatur nunc ex puncto Y ad lineam nodorum O N perpendiculum Y P, iunctaque recta P Z an-

gulus Z P Y ipsi inclinationi orbitae est aequalis, ideoque $= \eta$. Cum iam in triangulo P O Z habeatur latus O Z $= v$ cum angulo N O Z $= \psi$, erunt rectae

$$P Z = v \text{ sin. } \psi \text{ et } O P = v \text{ cos. } \psi.$$

Dein vero ex triangulo Z P Y nanciscimur

$$Z Y = v \text{ sin. } \eta \text{ sin. } \psi \text{ et } P Y = v \text{ cos. } \eta \text{ sin. } \psi.$$

Porro ex P tam ad O A quam X Y agantur normales P Q et P R, atque ex triangulo O P Q, vbi O P $= v$ cos. ψ et angulus P O Q $= \zeta$ erit

$$P Q = v \text{ cos. } \psi \text{ sin. } \zeta \text{ et } O Q = v \text{ cos. } \psi \text{ cos. } \zeta.$$

Denique in triangulo P Y R datur latus P Y $= v$ sin. ψ cos. η cum angulo P Y R $= \zeta$, vnde concluditur

$$P R = v \text{ sin. } \psi \text{ cos. } \eta \text{ sin. } \zeta \text{ et}$$
$$Y R = v \text{ sin. } \psi \text{ cos. } \eta \text{ cos. } \zeta.$$

Ex his igitur elementis deriuamus binas reliquas coordinatas X et Y: erit enim

$$O X = x = O Q - P R = v \text{ cos. } \psi \text{ cos. } \zeta - v \text{ sin. } \psi \text{ cos. } \eta \text{ sin. } \zeta,$$
$$X Y = y = P Q + Y R = v \text{ cos. } \psi \text{ sin. } \zeta + v \text{ sin. } \psi \text{ cos. } \eta \text{ cos. } \zeta;$$

modo autem vidimus esse

$$Y Z = z = v \text{ sin. } \psi \text{ sin. } \eta.$$

§. 33. Cum punctum orbitae proximum z tam in praesenti plano N O Z quam in sequente reperiatur, vbi anguli ζ et η incrementa ceperunt $d\zeta$ et $d\eta$, duplici modo a Z ad z peruenire poterit. Priore scilicet modo eo peruenitur, dum linea nodorum cum inclinatione tanquam

quam inuariabilis accipitur, angulus autem $NOZ = \psi$ incrementum capere ſtatuitur angulum $ZOz = d\psi$. Altero vero modo ad idem punctum z peruenietur, dum tam lineae nodorum quam inclinationi ſuae variatio tribuitur, ac praeterea angulus ψ differentiali ſuo naturali augetur. Quod ſi igitur formulas pro x, y, z inuentas hoc duplici modo differentiemus, ex vtroque eosdem valores pro dx, dy et dz reſultare neceſſe eſt.

§. 34. Non ſolum autem iſta conuenientia ipſas coordinatas ſpectat, ſed etiam quascunque formulas ex iis compoſitas; quo notato, vt rem ad noſtras formulas integrales primo inuentas accommodemus, conſideremus has duas formulas: $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, quarum formularum valores erunt

$$\frac{x}{z} = \frac{\cot.\psi \cos.\zeta}{\sin.\eta} - \cot.\eta \sin.\zeta;$$
$$\frac{y}{z} = \frac{\cot.\psi \sin.\zeta}{\sin.\eta} + \cot.\eta \cos.\zeta.$$

Has iam formulas primo priori modo differentiemus, ſtatuendo angulos ζ et η conſtantes, ac ponendo $d\psi = d\Phi$, reperieturque

$$d.\frac{x}{z} = -\frac{d\Phi \cos.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2} \text{ et } d.\frac{y}{z} = -\frac{d\Phi \sin.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2}.$$

§. 35. Eaedem autem formulae more ſolito differentiatae, ſumendis omnibus quantitatibus variabilibus, praebent has aequationes:

$$d.\frac{x}{z} = -\frac{d\psi \cos.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2} - \frac{d\zeta \sin.\zeta \cot.\psi}{\sin.\eta} - d\zeta \cos.\zeta \cot.\eta - \frac{d\eta \cos.\eta \cot.\psi \cos.\zeta}{\sin.\eta^2} + \frac{d\eta \sin.\zeta}{\sin.\eta^2},$$
$$d.\frac{y}{z} = -\frac{d\psi \sin.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi} + \frac{d\zeta \cos.\zeta \cot.\psi}{\sin.\eta} - d\zeta \sin.\zeta \cot.\eta - \frac{d\eta \cos.\eta \cot.\psi \sin.\zeta}{\sin.\eta^2} - \frac{d\eta \cos.\zeta}{\sin.\eta^2}.$$

His igitur binis valoribus inter se aequatis nanciscemur has duas aequationes differentiales:

$$\text{I.}\quad \frac{(d\psi - d\Phi)\cos.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2} = -\frac{d\zeta \sin.\zeta \cos.\psi}{\sin.\eta} - d\zeta \cos.\zeta \cot.\eta - \frac{d\eta \cos.\eta \cot.\psi \cos.\zeta}{\sin.\eta^2} + \frac{d\eta \sin.\zeta}{\sin.\eta^2}.$$

$$\text{II.}\quad \frac{(d\psi - d\Phi)\sin.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2} = +\frac{d\zeta \cos.\zeta \cot.\psi}{\sin.\eta} - d\zeta \sin.\zeta \cot.\eta - \frac{d\eta \cos.\eta \cot.\psi \sin.\zeta}{\sin.\eta^2} - \frac{d\eta \cos.\zeta}{\sin.\eta^2}.$$

§. 36. Nunc vt elementa $d\Phi$ et $d\psi$ eliminemus, vtamur hac combinatione: I. $\sin.\zeta$ — II. $\cos.\zeta$, quae perducet ad hanc aequationem:

$$0 = -\frac{d\zeta \cot.\psi}{\sin.\eta} + \frac{d\eta}{\sin.\eta^2},$$

quae reducta dat

$$d\eta = d\zeta \cot.\psi \sin.\eta.$$

Sicque iam innotescit insignis relatio inter variationem lineae nodorum et inclinationis ad eclipticam; ita vt cognita alterutra altera inde semper tuto concludi possit. Hinc intelligitur, quando fuerit argumentum latitudinis $\psi = 0$, tum lineam nodorum nullum incrementum capere posse, quia alioquin fieret $d\eta$ infinitum. Deinde vero, ties fuerit $\psi = 90°$, inclinatio nullam mutationem accipere poterit.

§. 37. Praeterea vero hinc etiam veram relationem inter elementa $d\Phi$ et $d\psi$ assignare possumus, adquohibentes hanc combinationem: I. $\cos.\zeta$ + II. $\sin.\zeta$. Hinc enim obtinebimus

$$\frac{d\psi - d\Phi}{\sin.\eta \sin.\psi^2} = -d\zeta \cot.\eta - \frac{d\eta \cos.\eta \cot.\psi}{\sin.\eta^2},$$

hinc-

hincque

$$d\psi - d\Phi = -d\zeta \text{ cof. } \eta \text{ fin. } \psi^2 - \frac{d\eta \text{ cof. } \eta \text{ cof. } \psi \text{ fin. } \psi}{\text{fin. } \eta},$$

vbi, ſi loco $d\eta$ valor ante inuentus ſubſtituatur, prodit

$$d\psi - d\Phi = -d\zeta \text{ cof. } \eta, \text{ ideoque}$$

$$d\Phi = d\psi + d\zeta \text{ cof. } \eta.$$

§. 38. Cum igitur per priorem operationem inuenerimus

$$d.\frac{x}{z} = -\frac{d\Phi \text{ cof. } \zeta}{\text{fin. } \eta \text{ fin. } \psi^2}, \text{ erit}$$

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{zz} = -\frac{d\Phi \text{ cof. } \zeta}{\text{fin. } \eta \text{ fin. } \psi^2}.$$

At ex formulis initio integratis eſt

$$z\,dx - x\,dz = d\theta \int B\,d\theta = Q\,d\theta,$$

quo valore ſubſtituto erit

$$\frac{Q\,d\theta}{zz} = -\frac{d\Phi \text{ cof. } \zeta}{\text{fin. } \eta \text{ fin. } \psi^2};$$

quare cum ſit $z = v \text{ fin. } \eta \text{ fin. } \psi$, habebimus

$$Q\,d\theta = -v\,v\,d\Phi \text{ cof. } \zeta \text{ fin. } \eta.$$

Deinde vero poſuimus $v\,v\,d\Phi = d\theta \int M\,d\theta$, exiſtente

$$\int M\,d\theta = V(P^2 + Q^2 + R^2),$$

vel etiam

$$\int M\,d\theta = V2 \int v\,v\,(t\,ds - k\,dv),$$

quo valore ſubſtituto erit

$$Q = -\text{ cof. } \zeta \text{ fin. } \eta \int M\,d\theta,$$

ideoque

$$\text{cof. } \zeta \text{ fin. } \eta = -\frac{Q}{\int M\,d\theta} = -\frac{Q}{V(P^2 + Q^2 + R^2)}.$$

§. 39. Simili modo cum fuerit

$\sigma. \frac{y}{z} = -\frac{d\Phi \sin.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2}$, erit

$\frac{z\,dy - y\,dz}{zz} = -\frac{d\Phi \sin.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2}$.

Per formulas autem integrales priores erat

$$z\,dy - y\,dz = -d\theta \int A\,d\theta = P\,d\theta,$$

vnde fit $\frac{P\,d\theta}{zz} = \frac{d\Phi \sin.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2}$; hincque ob

$z = v \sin.\eta \sin.\psi$ erit

$$P\,d\theta = v\,v\,d\Phi \sin.\zeta \sin.\eta,$$

ex qua aequatione, ob $v\,v\,d\Phi = d\theta \int M\,d\theta$, concluditur,

$$\sin.\zeta \sin.\eta = \frac{P}{\int M\,d\theta} = \frac{P}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}.$$

Haec igitur aequatio per priorem diuisa dabit

$$\text{tang.}\,\zeta = -\frac{P}{Q}, \text{ hincque porro}$$

$$\sin.\zeta = \frac{P}{\sqrt{(PP+QQ)}} \text{ et } \cos.\zeta = \frac{Q}{\sqrt{(PP+QQ)}},$$

ex quo deducitur

$$\sin.\eta = -\sqrt{\frac{PP+QQ}{PP+QQ+RR}}.$$

§. 40. Quoniam omnes perturbationes tanquam infinite paruae spectantur, descriptionem areae in ipsa orbita tempori proportionalem assumere licebit, ita vt sit $\int M\,d\theta$ quantitas constans, quae si igitur ponatur $= \mathfrak{C}$ aequationes modo inuentae ita referri possunt:

$$\cos.\zeta \sin.\eta = -\frac{Q}{\mathfrak{C}} = -\frac{\int B\,d\theta}{\mathfrak{C}} \text{ et}$$

$$\sin.\zeta \sin.\eta = +\frac{P}{\mathfrak{C}} = +\frac{\int A\,d\theta}{\mathfrak{C}},$$

ex quibus aequationibus differentiando colligitur:

$$-d\zeta \sin.\zeta \sin.\eta + d\eta \cos.\eta \cos.\zeta = -\frac{B\,d\theta}{\mathfrak{C}} = -\frac{(pz - rx)\,d\theta}{\mathfrak{C}},$$

$$+d\zeta \cos.\zeta \sin.\eta + d\eta \cos.\eta \sin.\zeta = +\frac{A\,d\theta}{\mathfrak{C}} = +\frac{(ry - qz)\,d\theta}{\mathfrak{C}},$$

vnde

vnde eliminando $d\eta$ fiet

$$d\zeta \text{ fin. } \eta = \frac{(pz - rx)\, d\phi \text{ fin. } \zeta + (ry - qz)\, d\phi \text{ cof. } \zeta}{\mathfrak{E}}.$$

At vero eliminando $d\zeta$ erit

$$d\eta \text{ cof. } \eta = -\frac{(pz - rx)\, d\phi \text{ cof. } \zeta + (ry - qz)\, d\phi \text{ fin. } \zeta}{\mathfrak{E}}.$$

§. 41. Ante autem inuenimus inter $d\zeta$ et $d\eta$ hanc rationem: $d\eta = d\zeta \text{ cot. } \psi \text{ fin. } \eta$, quae relatio hic introducta praebet hanc aequationem:

$$-(pz - rx) \text{ cof. } \zeta + (ry - qz) \text{ fin. } \zeta =$$
$$(pz - rx) \text{ fin. } \zeta \text{ cof. } \eta \text{ cot. } \psi + (ry - qz) \text{ cof. } \zeta \text{ cof. } \eta \text{ cot. } \psi,$$

quae euoluta hanc induit formam:

$$\left\{\begin{array}{l} -p\ (z \text{ cof. } \zeta \text{ fin. } \psi + z \text{ fin. } \zeta \text{ cof. } \eta \text{ cof. } \psi) \\ -q\ (z \text{ fin } \zeta \text{ fin. } \psi - z \text{ cof. } \zeta \text{ cof. } \eta \text{ cof. } \psi) \\ +r \left\{\begin{array}{l} x \text{ cof. } \zeta \text{ fin. } \psi + x \text{ fin. } \zeta \text{ cof. } \eta \text{ cof. } \psi \\ y \text{ fin. } \zeta \text{ fin. } \psi - y \text{ cof. } \zeta \text{ cot. } \eta \text{ cot. } \psi \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

siue concinnius

$$\left\{\begin{array}{l} +(ry - qz)(\text{fin. } \zeta \text{ fin. } \psi - \text{cof. } \zeta \text{ cof. } \eta \text{ cof. } \psi) \\ -(pz - rx)(\text{cof. } \zeta \text{ fin. } \psi + \text{fin. } \zeta \text{ cof. } \eta \text{ cof. } \psi) \end{array}\right\} = 0.$$

Haec autem relatio eatenus tantum valet, quatenus descriptio arearum, seu formula $v\,v\,d\,\Phi$ tempori est proportionalis.

§ 42. Hactenus planum principale A O B in plano eclipticae assumsimus; pro instituto autem nostro magis conueniet, hoc planum ita constituere, vt orbita planetae seu cometae ab eo perpetuo quam minime tantum discrepet. Teneat igitur hoc planum situm quendam medium inter omnes variationes, quas orbita quaesita subire

potest.

poteſt. Hoc igitur notato, quoniam variationes aſſumi poſſunt quam minimae, inclinatio orbitae ad hoc planum quaſi infinite parua ſpectari poterit, ita vt angulus η pro euaneſcente haberi poſſit, vnde erit

$$\text{ſin. } \eta = \eta \text{ et cof. } \eta = 1;$$

vnde valor ipſius z prodibit $= v\,\eta$ ſin. ψ, qui perpetuo erit quam minimus; tum vero erit

$$x = v \text{ cof. } (\psi + \zeta) \text{ et } y = v \text{ ſin. } (\psi + \zeta).$$

§. 43. Hic primo obſeruamus, ſi vis perturbans r abeſſet, tum corpus perpetuo in eodem plano A O B promoueri debere, ita vt aberratio ab iſto plano a ſola vi r proficiſci ſit cenſenda. Quoniam igitur quantitatem z vt euaneſcentem ſpectare licet, erit

$$A = ry \text{ et } B = -rx,$$

vnde aequationes ſupra inuentae erunt

$$\text{cof. } \zeta \text{ ſin. } \eta = \eta \text{ cof. } \zeta = +\tfrac{\int r x\, d\theta}{\mathfrak{C}} \text{ et}$$
$$\text{ſin. } \zeta \text{ ſin. } \eta = \eta \text{ ſin. } \zeta = \tfrac{\int r y\, d\theta}{\mathfrak{C}},$$

vnde fit tang. $\zeta = \frac{\int r y\, d\theta}{\int r x\, d\theta}$, ſiquidem ponimus $\int M\, d\theta = \mathfrak{C}$.

§. 44. Quia autem orbita quaeſita in ipſum planum A O B incidit, formula $v\,v\,d\Phi$ exhibet elementum areae in ipſo plano A O B deſcriptae, ſeu aequabitur ipſi

$$x\,dy - y\,dx = d\theta \int C\, d\theta,$$

ſicque iam erit

$$v\,v\,d\Phi = d\theta \int C\, d\theta = d\theta \int d\theta\,(q\,x - p\,y),$$

vnde integrale $\int d\theta\,(q\,x - p\,y)$ pro quantitate $\mathfrak{C}$ conſtante haberi poterit, ſi fuerit $q\,x - p\,y$ quantitas quam minima;

id

id quod semper supponere licet, idque eo magis, quando proxime fuerit $qx - py = 0$.

§. 45. Nunc igitur differentiando peruenimus ad has formulas:

$$d\eta \cos.\zeta - \eta\, d\zeta \sin.\zeta = \frac{r\, x\, d\theta}{\mathfrak{E}} \text{ et}$$

$$d\eta \sin.\zeta + \eta\, d\zeta \cos.\zeta = \frac{r\, y\, d\theta}{\mathfrak{E}},$$

vnde fit

$$d\eta = \frac{r\, d\theta\,(x \cos.\zeta + y \sin.\zeta)}{\mathfrak{E}} \text{ et}$$

$$\eta\, d\zeta = \frac{r\, d\theta\,(y \cos.\zeta - x \sin.\zeta)}{\mathfrak{E}}.$$

Cum igitur sit

$$x = v \cos.(\zeta + \psi) \text{ et } y = v \sin.(\zeta + \psi),$$

prodibit

$$d\eta = \frac{r\, v\, d\theta \cos.\psi}{\mathfrak{E}} \text{ et } \eta\, d\zeta = \frac{r\, v\, d\theta \sin.\psi}{\mathfrak{E}},$$

quorum valorum ille per hunc diuisus dat $\frac{\eta\, d\zeta}{d\eta} = \text{tang.}\psi$, ideoque $d\eta = \frac{\eta\, d\zeta}{\text{tang.}\psi}$, quae est eadem relatio, quam supra inter $d\zeta$ et $d\eta$ inuenimus. Ex his igitur formulis innotescit, quantas variationes quouis temporis momento tam positio lineae nodorum quam inclinatio patiatur, quae a sola vi r oriuntur, quae vis cum semper facile assignari queat, determinatio horum elementorum nulla prorsus laborat difficultate, sicque totum negotium reducitur ad resolutionem binarum aequationum inter quantitates θ, Φ et v iam supra inuentarum. Motus ergo quaesitus a solis viribus p et q pendebit et perinde erit comparatus, ac si fieret in ipso plano A O B.

Alia methodus mobilitatem orbitae determinandi.

§. 46. Supra iam innuimus, aequationem

$$x\int A\,d\theta + y\int B\,d\theta + z\int C\,d\theta = 0,$$

ad quam primae aequationes nos perduxerunt, ſpectari poſſe tanquam aequationem localem pro ſuperficie, in qua motus peragitur. Poſuimus autem breuitatis gratia

$$\int A\,d\theta = P,\ \int B\,d\theta = Q,\ \int C\,d\theta = R,$$

ita vt ſit $Px + Qy + Rz = 0$, quae aequatio, ſi quantitates P, Q et R, eſſent conſtantes, certum quoddam planum definiret. Quare cum iſtae litterae per aliquod temporis ſpatium nullam ſenſibilem mutationem patiantur, ſi eae vt conſtantes ſpectentur, ex hac aequatione definiri poterit planum, in quo planeta ſiue cometa hoc ſaltem tempore mouebitur.

Tab IX. Fig. 5.

§. 47. Referat igitur, vt initio, planum AOB eclipticam, ſitque recta ON interſectio plani quaeſiti cum ecliptica, pro qua ponamus angulum $AON = \zeta$. Cum igitur per totam hanc rectam ON ſit $z = 0$, poſitio huius lineae hac aequatione: $Px + Qy = 0$ exprimetur, vnde ſit $\frac{y}{x} = -\frac{P}{Q}$. Exprimit autem fractio $\frac{y}{x}$ tangentem anguli ζ, vnde ſtatim colligimus eſſe tang. $\zeta = -\frac{P}{Q}$, prorſus vt ante per multas ambages inuenimus.

§. 48. Nunc pro inclinatione huius plani ad eclipticam inuenienda, quam ante vocauimus $= \eta$, ſtatuamus in noſtra aequatione $x = 0$, vt ſit $Qy + Rz = 0$, ex qua,

qua, si in axe O B capiatur O P $= y$, definietur longitudo perpendicularis P Q ad planum inclinatum pertingens; erit scilicet P Q $= z = -\frac{Qy}{R}$. Iam ex P ad lineam nodorum O N ducatur normalis P R, iungaturque recta Q R, vt angulus P R Q exhibeat inclinationem planorum $= \eta$. Quia igitur angulus P O N $= 90° - \zeta$, in triangulo P O R erit P R $= y \cos. \zeta$; vnde ob P Q $= -\frac{Qy}{R}$, eruitur

$$\text{tang. P Q R} = \text{tang. } \eta = -\frac{Q}{R \cos. \zeta}.$$

§. 49. Cum igitur inuenerimus tang. $\zeta = -\frac{P}{Q}$: erit $\sin. \zeta = -\frac{P}{\sqrt{(PP+QQ)}}$ et $\cos. \zeta = \frac{Q}{\sqrt{(PP+QQ)}}$; sicque erit

$$\text{tang. } \eta = -\frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{R}.$$

Hincque porro deducitur

$$\sin. \eta = -\frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}},$$

qui valor prorsus cum superiori conuenit; vbi notasse iuvabit fore

$$\cos. \eta = \frac{R}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}.$$

Nunc autem, vt ante fecimus, in locum plani eclipticae A O B constituamus ipsum planum, in quo corpus certo quodam tempore, quod nobis certam epocham designet, mouebatur. Valores autem nostrarum formularum integralium ponamus fuisse

$$P = \int A d\theta = \mathfrak{A}, \quad Q = \int B d\theta = \mathfrak{B}, \quad R = \int C d\theta = \mathfrak{C},$$

vnde quia pro hac epocha erat $\mathfrak{A} x + \mathfrak{B} y + \mathfrak{C} z = 0$, vbique autem esse debet $z = 0$: euidens est, valores $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ euanescere debere, vt fiat $\mathfrak{C} z = 0$.

§. 50. Iam postquam ab hac epocha elapsum fuerit tempus θ, valores quantitatum P, Q, R sequenti

modo se habebunt:

$$P = \mathfrak{A} + \int A\, d\theta = o + \int d\theta\,(ry - qz),$$
$$Q = \mathfrak{B} + \int B\, d\theta = o + \int d\theta\,(pz - rx),$$
$$R = \mathfrak{C} + \int C\, d\theta = \mathfrak{C} + \int d\theta\,(qx - py).$$

At vero quia declinatio orbitae praesentis a plano A O B est quam minima, ita vt sumi possit $z = o$, pro hoc tempore erit

$$P = \int ry\, d\theta,$$
$$Q = -\int rx\, d\theta \text{ et}$$
$$R = \mathfrak{C} + \int d\theta\,(qx - py),$$

quae integralia ita capi oportet, vt in ipsa epocha, vbi $\theta = o$, evanescant. Vnde patet, quia ipsae vires perturbantes p, q, r sunt quasi infinite parvae, singulas has formulas integrales quantitates quam minimas exprimere.

§. 51. Referat nunc recta O N pro tempore θ ab epocha elapso lineam nodorum, qua planum, in quo corpus nunc mouetur, planum fixum A O B intersecat; atque posito angulo $A O N = \zeta$ et mutua inclinatione $= \eta$, quam vt infinite parvam spectare licebit, formulae ante inuentae pro hoc casu dabunt

$$\text{tang. } \zeta = \frac{\int ry\, d\theta}{\int rx\, d\theta} \text{ et}$$
$$\text{tang. } \eta = -\frac{\sqrt{((\int ry\, d\theta)^2 + (\int rx\, d\theta)^2)}}{\mathfrak{C} + \int d\theta\,(qx - py)},$$

vbi, quia quaestio est de valore quam minimo tang. η, in denominatore pars integralis prae constante $\mathfrak{C}$ reiici potest, ita vt fit

$$\text{tang. } \eta = -\frac{\sqrt{((\int ry\, d\theta)^2 + (\int rx\, d\theta)^2)}}{\mathfrak{C}}.$$

Inde autem fit

$$\text{sin. } \zeta = \frac{\int ry\, d\theta}{\sqrt{((\int ry\, d\theta)^2 + (\int rx\, d\theta)^2)}},$$

vnde

vnde erit $\sin. \zeta = -\frac{\int r y \, d\theta}{\mathfrak{C} \, tang. \eta}$, ita vt sit

$$\sin. \zeta \, tang. \eta = \eta \sin. \zeta = -\frac{\int r y \, d\theta}{\mathfrak{C}},$$

ex quibus ergo formulis ad quoduis tempus tam positio lineae nodorum, seu angulus ζ, quam inclinatio infinite parua η determinari poterit.

§. 52. Cum igitur mobilitas orbitae his duobus elementis contineatur, hinc manifestum est, totam orbitae mobilitatem a sola vi perturbante r, cuius directio in planum A O B est perpendicularis, pendere, id quod etiam ex ipsa rei natura intelligitur. Si enim solae duae vires p et q adessent, quarum directio in ipsum planum A O B incidit, corpus perpetuo in eodem plano moueri pergeret. Eatenus igitur tantum ab hoc plano declinabitur, quatenus adest vis r in hoc planum normaliter agens, cuius ergo actio tota in hoc effectu consumetur; quemadmodum binae reliquae vires p et q perinde motum corporis afficient, ac si totus motus in plano A O B absolueretur.

§. 53. Quo autem pateat, quamnam legem mutationes momentaneae angulorum ζ et η seruent, cum formula postremo inuenta

$$\eta \sin. \zeta = -\frac{\int r y \, d\theta}{\mathfrak{C}}$$

combinemus eandem per tang. ζ diuisam, quae erit

$$\eta \cos. \zeta = -\frac{\int r x \, d\theta}{\mathfrak{C}},$$

hincque differentiando nanciscemur

$$d\eta \sin. \zeta + \eta \, d\zeta \cos. \zeta = -\frac{r y \, d\theta}{\mathfrak{C}} \text{ et}$$

$$d\eta \cos. \zeta - \eta \, d\zeta \sin. \zeta = -\frac{r x \, d\theta}{\mathfrak{C}};$$

vnde combinando colligitur

$$d\eta = -\frac{r\,d\theta\,(y\,\text{fin.}\,\zeta + x\,\text{cof.}\,\zeta)}{\mathfrak{C}} \text{ et}$$

$$\eta\,d\zeta = -\frac{n\,d\theta\,(y\,\text{cof.}\,\zeta - x\,\text{fin.}\,\zeta)}{\mathfrak{C}}.$$

Tab. IX. Fig. 6. Ad has aequationes euoluendas ſit Z locus corporis infinite parum ſuper plano A O B eleuatus, ita vt cum puncto Y confundi poſſit; ductaque recta Y P ad O N normali, facile patet fore

$$O\,P = y\,\text{fin.}\,\zeta + x\,\text{cof.}\,\zeta \text{ et}$$

$$Y\,P = y\,\text{cof.}\,\zeta - x\,\text{fin.}\,\zeta.$$

Quare ſi argumentum latitudinis vt ſupra vocetur $N\,O\,Z = \psi$, vt ob $O\,Y = v$ fiat $O\,P = v\,\text{cof.}\,\psi$ et $Y\,P = v\,\text{fin.}\,\psi$, variationes momentaneae modo inuentae ad has expreſſiones concinniores reuocantur:

$$d\eta = -\frac{r\,v\,d\theta\,\text{cof.}\,\psi}{\mathfrak{C}} \text{ et } \eta\,d\zeta = -\frac{r\,v\,d\theta\,\text{fin.}\,\psi}{\mathfrak{C}},$$

vnde ſequitur relatio ſupra inuenta

$$\frac{d\eta}{\eta\,d\zeta} = \text{cot.}\,\psi, \text{ ſiue } d\eta = \eta\,d\zeta\,\text{cot.}\,\psi.$$

Inueſtigatio inaequalitatum motus in ipſa orbita.

§. 54. Hic igitur totum corporis motum ita conſiderare licebit, quaſi in ipſo plano A O B perageretur, dum praeter vim ad Solem tendentem tantum a binis viribus p et q ſollicitatur, quae ſi abeſſent, corpus motu regulari circa Solem in ſectione conica circumferretur. Vnde intelligitur, quoniam iſtae vires vt minimae ſpectantur, motum parumper tantum a regulari eſſe discrepaturum, eius-

eiusque aberrationem commodissime repraesentari posse, si ad quoduis tempus ea sectio conica inuestigetur, per quam eo saltem tempore moueatur, vnde sequens problema praemittamus.

Problema.

Cognito loco et motu corporis, quod a sola vi Solis attrahitur, inuenire elementa orbitae ellipticae, in qua motum suum absoluet.

Solutio.

§. 55. Quoniam primo locus corporis, qui sit in Y, datur, centro Solis existente in O, vocetur eius distantia $OY = v$, angulus vero $AOY = \Phi$, quo scilicet a directione fixa OA iam est remotus. Deinde quicunque motus huic corpori fuerit impressus, quo in directione Yy procedit, resoluatur is secundum directionem Yv, quae cum distantia OY in directum iaceat, et secundum directionem Yu, illi normalem, eritque illius celeritas $\frac{dv}{d\vartheta}$, huius vero celeritas $\frac{v\,d\Phi}{d\vartheta}$; quare, quia motus vt cognitus spectatur, ponatur $\frac{dv}{d\vartheta} = u$ et $\frac{d\Phi}{d\vartheta} = \xi$, eruntque cognitae hae quatuor quantitates v, Φ, u et ξ, ex quibus speciem sectionis conicae, in qua motus fiet, definiri oportet. Tab. X. Fig. 1.

§. 56. Primo igitur quaeri debet locus perihelii huius orbitae, qui sit in Π, pro quo ponatur angulus $AO\Pi = \pi$, ita vt sit angulus $\Pi OY = \Phi - \pi$, qui vocatur anomalia vera, quam ponamus $\Pi OY = \omega$, ita vt sit $\Phi = \omega + \pi$. Praeterea vero denotet f semiparametrum orbitae quaesitae, et excentricitas statuatur $= g$, ex quibus ele-

elementis distantia $OY = v$ ita determinatur, vt sit $v = \frac{f}{1+g\cos.\omega}$. Denique vero ex indole motus regularis constat, vti deinceps clarius patebit, rationem temporis ita in calculum ingredi, vt sit $d\vartheta = \frac{vv\,d\Phi}{\sqrt{f}}$.

§. 57. Cum igitur sit $\frac{d\Phi}{d\vartheta} = \xi$, vltima conditio statim dat $\sqrt{f} = v\,v\,\xi$, vnde ergo statim parameter orbitae innotescit, dum est $f = v^4\xi^2$. Hinc igitur erit $v = \frac{v^2\xi^2}{1+g\cos.\omega}$, ideoque $1 + g\cos.\omega = v^2\xi^2$. Porro vero quia quantitates f et g sunt constantes, differentiatio formulae $v = \frac{f}{1+g\cos.\omega}$ dabit $dv = \frac{fg\,d\omega\sin.\omega}{(1+g\cos.\omega)^2}$, vnde cum sit $d\vartheta = \frac{vv\,d\Phi}{\sqrt{f}} = \frac{v^2v\,d\omega}{\sqrt{f}}$, ob π constans, erit $\frac{dv}{d\vartheta} = u = \frac{g\sin.\omega}{\sqrt{f}}$, vbi loco $\sqrt{f}$ posito valore $v\,v\,\xi$, fiet $u = \frac{g\sin.\omega}{v\,v\,\xi}$. Ante autem iam vidimus esse $1 + g\cos.\omega = v^2\xi^2$, ex quibus duabus aequationibus binae quantitates incognitae g et ω quaeri debent.

§. 58. Cum igitur sit $g\sin.\omega = u\,v\,v\,\xi$ et $g\cos.\omega = v^2\xi^2 - 1$, colligitur fore $\text{tang.}\,\omega = \frac{u\,v\,v\,\xi}{v^2\xi^2-1}$. Sicque determinabitur anomalia vera ω, qua inuenta pro loco perihelii habebitur $\pi = \Phi - \omega$. Tum vero hinc etiam innotescit excentricitas $g = \frac{u\,v\,v\,\xi}{\sin.\omega}$. Sicque omnia quatuor elementa: scil. f, g, ω et π sunt reperta, quibus orbita, quae quaeritur, perfecte determinatur.

Tab. X. Fig. 2

§. 59. Hoc problemate praemisso, contemplemur casum, quo corpus in Y praeter vim solarem $= \frac{1}{v^2v}$, in directione Y O agentem, sollicitatur a duabus viribus $Yp = p$ et $Yq = q$, quandoquidem effectus tertiae vis r iam est determinatus. Ponamus igitur vt supra binas coordinatas $OX = x$ et $XY = y$, vt sit $v\,v = x\,x + y\,y$; tum vero

hic

hic ſtatim vocetur angulus A O Y $= \Phi$, eritque $x = v \cos. \Phi$ et $y = v \sin. \Phi$. Loco virium autem perturbantium p et q in calculum introducamus duas alias ſecundum directiones Y m et Y n agentes, quarum haec ad illam ſit normalis, ac vocemus vim Y $m = m$ et Y $n = n$, atque ex iſtis viribus praecedentes p et q ita definientur, vt ſit

$$p = m \cos \Phi - n \sin. \Phi \text{ et } q = m \sin. \Phi + n \cos. \Phi.$$

§. 60. Pro motu igitur ex his viribus oriundo principia mechanica ſuppeditant has duas aequationes:

I. $\frac{d\,d\,x}{d\,\theta^2} = -\frac{x}{v^3} + m \cos. \Phi - n \sin. \Phi;$

II. $\frac{d\,d\,y}{d\,\theta^2} = -\frac{y}{v^3} + m \sin. \Phi + n \cos. \Phi;$

et cum ſit $x = v \cos. \Phi$ et $y = v \sin. \Phi$, hae aequationes erunt:

$$\frac{d\,d\,x}{d\,\theta^2} = -\frac{\cos. \Phi}{v\,v} + m \cos. \Phi - n \sin. \Phi;$$
$$\frac{d\,d\,y}{d\,\theta^2} = -\frac{\sin. \Phi}{v\,v} + m \sin. \Phi + n \cos. \Phi.$$

§. 61. Introducamus autem porro loco $d\,d\,x$ et $d\,d\,y$ valores per v et Φ expreſſos, ac primo quidem habebimus:

$$d\,x = d\,v \cos. \Phi - v\,d\,\Phi \sin. \Phi \text{ et}$$
$$d\,y = d\,v \sin. \Phi + v\,d\,\Phi \cos. \Phi,$$

hincque denuo differentiando:

I. $d\,d\,x = d\,d\,v \cos. \Phi - 2\,d\,v\,d\,\Phi \sin. \Phi$
$\quad - v\,d\,\Phi^2 \cos. \Phi - v\,d\,d\,\Phi \sin. \Phi;$

II. $d\,d\,y = d\,d\,v \sin. \Phi + 2\,d\,v\,d\,\Phi \cos. \Phi$
$\quad - v\,d\,\Phi^2 \sin. \Phi + v\,d\,d\,\Phi \cos. \Phi;$

qui valores in ſuperioribus aequationibus ſubſtituti intelligantur.

§. 62. Nunc primo faciamus hanc combinationem: I. cof. $\Phi + II.$ fin. Φ, quae deducet ad illam aequationem:

$$\frac{d\,dv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{1}{vv} + m.$$

Deinde vero fiat haec combinatio: II. cof. $\Phi - I.$ fin. Φ, quae dabit:

$$\frac{2\,dv\,d\Phi + v\,d\,d\Phi}{d\theta^2} = n.$$

Sicque tam finus quam cofinus anguli Φ ex calculo exceſſerunt, quod non contigiſſet, ſi vires p et q in calculo retinuiſſemus.

§. 63. Quanquam hae aequationes ſunt differentiales ſecundi gradus, tamen integratione penitus ſuperſedere poterimus, quandoquidem ope problematis praemiſſi ad ſcopum optatum pertingere licebit. Quoniam igitur in illo problemate poſuimus $\frac{dv}{d\theta} = u$ et $\frac{d\Phi}{d\theta} = \xi$, ob elementum $d\theta$ conſtans aſſumtum erit

$$\frac{d\,dv}{d\theta} = du \text{ et } \frac{d\,d\Phi}{d\theta} = d\xi,$$

quibus valoribus introductis binae aequationes inuentae has induent formas:

$$\frac{du}{d\theta} - v\,\xi^2 = -\frac{1}{vv} + m \text{ et } 2\,u\,\xi + \frac{v\,d\xi}{d\theta} = n.$$

Sicque hinc innoteſcunt noui valores differentiales $\frac{du}{d\theta}$ et $\frac{d\xi}{d\theta}$, quippe qui erunt:

$$\frac{du}{d\theta} = v\,\xi^2 - \frac{1}{vv} + m \text{ et } \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{n - 2u\xi}{v}.$$

Tab. X. Fig. 1.

§. 64. Quodſi iam aſſumamus, tempore quo corpus erat in Y, eius motum ad talem ſectionem conicam pertinuiſſe, pro qua fuerit perihelium in puncto Π, exiſtente angulo $A\,O\,\Pi = \pi$; tum vero ſemiparameter fuerit $= f$, excentricitas $= q$ et anomalia vera $\Pi\,O\,Y = \omega$, ita vt $\Phi = \pi + \omega$, tum corpus hanc curuam deſcribere eſſet

eſſet perecturum, ſi vires perturbantes m et n ſubito annihilarentur. Euidens autem eſt, ob iſtas vires perturbantes elementa iſtius ſectionis conicae continuo mutatum iri, ita vt elapſo tempusculo $d\theta$ ſuis differentialibus increſcant.

§. 65. Ex motu autem, quem corpus in puncto Υ habuit, elementa orbitae in praecedente problemate ita determinauimus, vt eſſet

1°.) $\sqrt{f} = v\,v\,\xi$; 2°.) $g \sin.\,\omega = u\,v\,v\,\xi$;

3°.) $g \cos.\,\omega = v^3\xi^3 - 1$ et 4°.) $\pi = \Phi - \omega$;

vnde differentiando incrementa horum elementorum: ſcil. df, dg, $d\omega$ et $d\pi$ determinari poterunt, quibus inuentis ad quoduis tempus eam ſectionem conicam aſſignare poterimus, ad quam motum corporis eo ſaltem tempore referri oportet. Ipſum autem tempus θ hac formula continebitur:

$$d\theta = \frac{v\,v\,d\Phi}{\sqrt{f}}.$$

§ 66. Vt igitur has orbitae variationes eruamus, differentiemus primo aequationem primam, cuius differentiale per $d\theta$ diuiſum dabit:

$$\frac{df}{2\,d\theta\sqrt{f}} = \frac{2v\xi}{d\theta}\frac{dv}{d\theta} + \frac{vv^2\xi}{d\theta} = 2\,u\,v\,\xi + v\,v.\frac{d\xi}{d\theta}.$$

Modo autem vidimus eſſe $\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{n-2u\xi}{v}$, quo valore ſubſtituto erit $\frac{df}{2\,d\theta\sqrt{f}} = n\,v$, vnde incrementum ſemiparametri orbitae, quod tempusculo $d\theta$ naſcitur, ſatis commode innoteſcit, cum ſit $df = 2\,n\,v\,d\theta\sqrt{f} = 2\,n\,v^3\,\xi\,d\theta$. Vnde patet, ſi vis perturbans n euaneſceret, tum etiam parametrum orbitae nullam mutationem eſſe paſſurum.

§. 67. Pro excentricitate g et anomalia vera ω coniunctim consideremus has formulas:

$$g \text{ sin. } \omega = u\,v\,v\,\xi \text{ et } g \text{ cos. } \omega = v^3\,\xi^2 - 1,$$

quarum differentialia per $d\,\theta$ diuisa dabunt:

I. $\frac{d\,g\,sin.\,\omega}{d\,\theta} + \frac{g\,d\,\omega\,cos.\,\omega}{d\,\theta} = \frac{u\,v\,v\,d\,\xi}{d\,\theta} + \frac{2\,u\,v\,\xi\,d\,v}{d\,\theta} + \frac{v\,v\,\xi\,d\,u}{d\,\theta}$.

II. $\frac{d\,g\,cos.\,\omega}{d\,\theta} - \frac{g\,d\,\omega\,sin.\,\omega}{d\,\theta} = \frac{2\,v^3\,\xi\,d\,\xi}{d\,\theta} + \frac{3\,v\,v\,\xi\,\xi\,d\,v}{d\,\theta}$.

Hic igitur loco $\frac{d\,u}{d\,\theta}$, $\frac{d\,\xi}{d\,\theta}$ et $\frac{d\,v}{d\,\theta}$, valores supra assignati substituantur, ac peruenietur ad has duas aequationes:

I. $\frac{d\,g\,sin.\,\omega}{d\,\theta} + \frac{g\,d\,\omega\,cos.\,\omega}{d\,\theta} = n\,u\,v + m\,v\,v\,\xi + v^3\,\xi^3 - \xi$.

II. $\frac{d\,g\,cos.\,\omega}{d\,\theta} - \frac{g\,d\,\omega\,sin.\,\omega}{d\,\theta} = 2\,n\,v\,v\,\xi - u\,v\,v\,\xi\,\xi$,

quae aequationes ob

$$v^3\,\xi^3 - \xi = g\,\xi \text{ cos. } \omega \text{ et } u\,v\,v\,\xi\,\xi = g\,\xi \text{ sin. } \omega$$

abeunt in has:

I. $\frac{d\,g\,sin.\,\omega}{d\,\theta} + \frac{g\,d\,\omega\,cos.\,\omega}{d\,\theta} = n\,u\,v + m\,v\,v\,\xi + g\,\xi$ cos. ω.

II. $\frac{d\,g\,cos.\,\omega}{d\,\theta} - \frac{g\,d\,\omega\,sin.\,\omega}{d\,\theta} = 2\,n\,v\,v\,\xi - g\,\xi$ sin. ω.

§. 68. Iam prior harum aequationum ducta in sin. ω posterior vero in cos. ω inuicemque additae dabunt hanc aequationem:

$$\frac{d\,\xi}{d\,\theta} = m\,v\,v\,\xi \text{ sin. } \omega + n\,v\,(u \text{ sin. } \omega + 2\,v\,\xi \text{ cos. } \omega),$$

vnde iterum patet, si vires perturbatrices essent nullae, tum excentricitatem g manere constantem, prorsus vti rei natura postulat. Dein vero si faciamus I. cos. ω − II. sin. ω, prodibit

$$\frac{g\,d\,\omega}{d\,\theta} = m\,v\,v\,\xi \text{ cos. } \omega + n\,v\,(u \text{ cos. } \omega - 2\,v\,\xi \text{ sin. } \omega) + g\,\xi.$$

Vnde

Vnde patet, casu quo $m = 0$ et $n = 0$ fore $\frac{g\,d\omega}{d\vartheta} = g\xi$, ideoque ob $g\xi = \frac{g\,d\Phi}{d\vartheta}$ erit $d\omega = d\Phi$. Quoniam enim hoc casu linea absidum quiesceret, ob angulum π constantem vtique foret $d\Phi = d\omega$. Denique inuento elemento $d\omega$ ob $d\pi = d\Phi - d\omega$, ideoque $\frac{d\pi}{d\vartheta} = \xi - \frac{d\omega}{d\vartheta}$, reperietur pro motu lineae absidum

$$\frac{d\pi}{d\vartheta} = -\frac{m\,v\,v\,\xi\,cos.\omega}{g} - \frac{n\,v\,(n\,cos.\omega - 2v\,\xi\,sin.\omega)}{g}.$$

Vnde itidem patet, casu $m = 0$ et $n = 0$ lineam absidum in eodem situ conseruari.

§. 69. Colligamus nunc quae hactenus sunt eruta; ac si pro tempore quocunque ϑ fuerit locus perihelii in Π, existente angulo $A\,O\,\Pi = \pi$, tum vero orbitae ellipticae semiparameter fuerit $= f$, excentricitas g et anomalia vera $= \omega$; tum pro loco corporis habebitur angulus $A\,O\,Y = \pi + \omega = \Phi$, eiusque distantia a sole

$$O\,Y = v = \frac{f}{1 + g\,cos.\omega}.$$

Vnde cum corpus per tempusculum $d\vartheta$ in hac ipsa orbita fit progressurum, erit $d\Phi = d\omega$ et $v\,v\,d\omega = d\vartheta\sqrt{f}$, hincque porro

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = \frac{\sqrt{f}}{v\,v} = \frac{(1 + g\,cos.\omega)^2}{f\sqrt{f}},$$

qui ergo erit valor ipsius $\xi = \frac{d\Phi}{d\vartheta}$. Praeterea vero erit

$$d\,v = \frac{f\,g\,d\,\omega\,sin.\omega}{(1 + g\,cos.\omega)^2}, \text{ hincque}$$

$$\frac{d\,v}{d\vartheta} = u = \frac{g\,sin.\omega}{\sqrt{f}},$$

vnde variationes momentaneas supra inuentas per ipsa orbitae elementa determinare licebit.

§. 70. Elapso scilicet tempore $d\theta$, ob vires perturbatrices m et n primo semiparameter orbitae, qui erat $= f$, augmentum accipiet df, ita vt sit

$$\frac{df}{2d\theta\sqrt{f}} = nv = \frac{nf}{1+g\cos.\omega}.$$

Sicque erit

$$df = \frac{2nf\,d\theta\sqrt{f}}{1+g\cos.\omega},$$

vnde, postquam hinc elapsum fuerit tempus θ, habebitur integrando

$$\int\frac{df}{2f\sqrt{f}} = -\frac{1}{\sqrt{f}} = \int\frac{n\,d\theta}{1+g\cos.\omega};$$

vbi notetur esse

$$d\theta = \frac{f\,d\omega\sqrt{f}}{(1+g\cos.\omega)^2};$$

quo valore substituto prodit

$$\frac{df}{2f^3} = \frac{n\,d\omega}{(1+g\cos.\omega)^2}, \text{ hincque integrando}$$

$$-\frac{1}{4f^2} = n\int\frac{d\omega}{(1+g\cos.\omega)^2}.$$

Porro autem pro incremento excentricitatis orbitae, quod tempusculo $d\theta$ accipiet, erit

$$\frac{dg}{d\theta} = m\sqrt{f}.\sin.\omega + n\left(\frac{g\sin.\omega}{1+g\cos.\omega} + 2\cos.\omega\right)\sqrt{f},$$

vnde integrando ad quoduis aliud tempus excentricitas elici debebit.

§. 71. Quaeramus nunc etiam incrementum anomaliae verae, seu anguli ω, quod tempusculo $d\theta$ accipit, et quod inuenimus esse:

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{mvv\xi\cos.\omega}{g} + \frac{nv(u\cos.\omega - 2v\xi\sin.\omega)}{g} + \xi,$$

quae expressio substitutis valoribus abit in hanc:

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{m\cos.\omega\sqrt{f}}{g} - \frac{n\sin.\omega\sqrt{f}}{g}\left(\frac{2+g\cos.\omega}{1+g\cos.\omega}\right) + \frac{(1+g\cos.\omega)^2}{f\sqrt{f}},$$

atque

atque hinc cum sit

$$\frac{d\pi}{d\vartheta} = \frac{d\Phi}{d\vartheta} - \frac{d\omega}{d\vartheta} = \xi - \frac{d\omega}{d\vartheta},$$

pro motu lineae absidum erit

$$\frac{d\pi}{d\vartheta} = -\frac{m\cos.\omega\sqrt{f}}{g} + \frac{n\sin.\omega\sqrt{f}}{g}\frac{(2+g\cos.\omega)}{1+g\cos.\omega}.$$

§. 72. Hoc igitur modo omnia incrementa, quae cuncta elementa sectionis conicae tempusculo $d\vartheta$ a viribus perturbantibus m et n accipiunt, determinauimus. In praecedente vero articulo iam definiuimus, quantum haec orbita a plano A O B dimoueatur a vi r in hoc planum perpendiculariter agente. Has igitur omnes operationes concinnitatis gratia in sequenti articulo colligamus.

Praecepta

pro determinandis perturbationibus, quas orbitae planetarum vel cometarum ab actione aliorum corporum coelestium perpetiuntur.

§. 73. Quoniam perturbationes quam minimae supponuntur, ita vt corpus per aliquod tempus motu regulari per orbitam ellipticam circumferri censeri possit, ponamus certo quodam tempore, quod tanquam epocham fixam spectemus, orbitam planetae siue cometae sitam fuisse in ipso plano A O B, eiusque perihelium fuisse in Π (fig. 1.) existente angulo A O Π = π, quo quasi longitudo perihelii a directione fixa O A designatur; tum vero fuerit eodem tempore semiparameter orbitae = f et excentricitas = g. Hanc igitur orbitam, (quatenus motus regulis *Keplerianis* perfecte est conformis) in qua planeta siue cometa reuera circumferretur, si multae vires perturba-

turbatrices adeſſent, orbitam fictam appellemus, ita vt nobis incumbat, pro quouis tempore ab epocha elapſo variationes aſſignare, quibus vera orbita ab hac orbita ficta ſit aberratura.

§. 74. Primo igitur vires perturbatrices perpendamus, quae ab actione cuiusque corporis coeleſtis oriuntur. Elapſo igitur ab epocha tempore quocunque $= 0$, reperiatur planeta ſiue cometa in orbita ficta in Y, ſitque eius anomalia vera, ſiue angulus $\Pi O Y = \omega$, ideoque longitudo ſeu angulus $A O Y = \pi + \omega$, vnde eius diſtantia a ſole erit $O Y = \frac{f}{1 + g \cos. \omega}$. Eodem autem tempore verſetur corpus coeleſte, a quo perturbatio producatur, ſupra hoc planum in puncto P, a quo ad planum A O B demittatur perpendiculum P Q iunganturque rectae ad ſolem ductae P O et Q O, item recta ad Y ducta P Y. Iam ſi maſſa corporis in P ponatur $= M$, dum maſſa ſolis, vti ſupra aſſumſimus, vnitate deſignatur, vis, qua hoc corpus in ſolem aget, erit $\frac{M}{O P^2}$, vnde haec vis in directione contraria P O ipſi planetae in Y applicata eſt concipienda. Praeterea vero planeta in Y immediate trahetur verſus P in directione Y P, vi $= \frac{M}{Y P^2}$. Tab. X Fig. 3.

§. 75. Primo igitur vis ſecundum directionem P O, quae eſt $\frac{M}{P O^2}$, reſoluatur ſecundum directiones P Q et Q O, eritque vis ſecundum $P Q = \frac{M \cdot P Q}{Q O^3}$ et vis ſecundum $Q O = \frac{M \cdot Q O}{P O^3}$. Simili modo, ducta recta Q Y, vis trahens ſecundum Y P, quae eſt $\frac{M}{Y P^2}$, reſoluatur ſecundum directiones Q P et Y Q, eritque vis ſecundum $Q P = \frac{M \cdot Q P}{Y P^3}$, et

et vis secundum $YQ = \frac{M.YQ}{YP^3}$. Quoniam igitur ab hac vi posteriore punctum Y perpendiculariter sursum sollicitatur a vi $= \frac{M.QP}{YP^3}$, a priore vero, quae erat $\frac{M.PQ}{PO^3}$, deorsum, vis ad planum AOB normalis, quam supra designauimus littera r, erit

$$r = \frac{M.QP}{YP^3} - \frac{M.PQ}{PO^3} = M.PQ\left(\frac{1}{YP^3} - \frac{1}{PO^3}\right).$$

Vnde patet, hanc vim sursum esse directam, quando fuerit $PO > YP$, contra vero deorsum, quando fuerit $PO < YP$; siquidem punctum P supra planum AOB versetur. Quod si igitur eueniat, vt corporis P distantiae a sole O et a puncto Y sint inter se aequales, tum vis r euanescet, et punctum Y neque sursum neque deorsum vrgebitur.

§. 76. Vt nunc etiam ambas vires, quas vocauimus m et n, quae in ipso plano AOB sunt positae, hinc definiamus, a puncto Q ad rectam OY normalem ducamus QR; ac primo quidem vis $QO = \frac{M.QO}{PO^3}$, dabit pro directione QR vim $\frac{M.QR}{PO^3}$, et secundum OR vim $\frac{M.RO}{PO^3}$. Simili modo vis secundum YQ, quae est $= \frac{M.YQ}{YP^3}$, resoluta dat pro directione YR vim $= \frac{M.YR}{YP^3}$, et pro directione RQ vim $= \frac{M.RQ}{YP^3}$. Quare cum posuerimus vim a sole recedentem secundum $Ym = m$, vim vero ad hanc directionem normalem secundum $Yn = n$, habebimus:

$$m = -\frac{M.YR}{YP^3} - \frac{M.RO}{PO^3} \text{ et}$$

$$n = \frac{M.RQ}{YP^3} - \frac{M.QR}{PO^3} = M.QR\left(\frac{1}{YP^3} - \frac{1}{PO^3}\right),$$

ita vt haec vis n se habeat ad vim superiorem r vt QR ad PQ.

§. 77. Quod si punctum Y simul a pluribus aliis corporibus coelestibus sollicitetur, quae sint p', p'', p''', etc., ex singulis per formulas modo inuentas ternas vires litteris m, n et r designatas colligi oportet, quibus inuentis et debito modo coniunctis, si ponamus hoc tempore anomaliam veram in orbita ficta fuisse $= \omega$, tum semiparameter orbitae, qui erat $= f$ tempusculo $d\theta$ incrementum accipiet $df = \frac{2nf\sqrt{f}}{1+g\cos.\omega}d\theta$, in cuius formulae integratione quantitates f et g vt constantes spectare licebit. Tum vero meminisse iuuabit esse $d\theta = \frac{fd\omega\sqrt{f}}{(1+g\cos.\omega)^2}$. Plerumque autem integrationem nullo modo sperare licebit; ita vt ad computationem tam virium m, n et r quam anguli ω pro pluribus temporibus a se inuicem non nimis remotis confugiendum erit; vbi pro elemento temporis $d\theta$ satis tuto ipsa temporum interualla accipi poterunt. Quo obseruato omnes istae formulae in vnam summam collectae dabunt verum incrementum, quod semiparameter f interea acceperit.

§. 78. Deinde vero incrementum dg quod excentricitas orbitae ab actione virium m et n tempusculo $d\theta$ accipiet, erit

$$dg = md\theta\sin.\omega\sqrt{f} + nd\theta\sqrt{f}\left(\frac{g\sin.\omega^2}{1+g\cos.\omega} + 2\cos.\omega\right),$$

vbi circa integrationem eadem sunt tenenda, quae modo ante commemorauimus. Praeterea vero progressio momentanea perihelii erit

$$d\pi = -\frac{md\theta\cos.\omega\sqrt{f}}{g} + \frac{n\sin.\omega\sqrt{f}}{g}\left(\frac{2+g\cos.\omega}{1+g\cos.\omega}\right)d\theta,$$

quo inuento incrementum anomaliae verae erit

$$d\omega = \frac{(1+g\cos.\omega)^2}{f\sqrt{f}}d\theta - d\pi,$$

vnde

vnde locus planetae in ſua orbita corrigi poterit pro quolibet tempore propoſito.

§. 79. Tantum igitur ſupereſt, vt indicemus, quantum vera orbita a plano fixo A O B, quouis tempore ſit declinatura, quem totum effectum ex vi normali r definiri oportebit; pro quo negotio ſupra has aequationes nacti ſumus:

$$\text{cof. } \zeta \text{ ſin. } \eta = \frac{\int r x \, d\theta}{\mathfrak{E}} \text{ et ſin. } \zeta \text{ ſin. } \eta = \frac{\int r y \, d\theta}{\mathfrak{E}}.$$

Vbi, quia $\mathfrak{E}$ in motu regulari erat valor formulae $\frac{v v \, d\Phi}{a \theta}$, nunc conſtat fore $\mathfrak{E} = \sqrt{f}$:

§. 80. Repraeſentet igitur curua A Y B orbitam fictam, in qua pro quopiam tempore θ ab epocha elapſo planeta fuerit in Y, vbi perpendiculariter ſurſum vrgeatur vi $Y r = r$. Iam capiantur iſtius vis momenta reſpectu amborum axium O A et O B; eritque momentum prius $= r y$; at reſpectu axis O B momentum erit $= r x$; poſitis ſcilicet coordinatis $OX = x$ et $XY = y$. Huiusmodi autem bina momenta pro pluribus temporibus ab epocha elapſis inueſtigari concipimus, vt interualla eorum ſatis tuto per ipſum elementum $d\theta$ exprimi queant; tum autem per totum tempus θ ab epocha elapſum haec bina momenta in ſummam colligantur, atque valores hinc reſultantes ponantur: Tab X. Fig. 4.

$$\int r x \, d\theta = P \text{ et } \int r y \, d\theta = Q,$$

ad quod remedium ſemper erit confugiendum, quando nulla ſpes adeſt has formulas actu integrandi.

§. 81. Quod ſi iam pro tempore θ ab epocha elapſo linea nodorum fuerit recta ON, quam quidem ad nodum aſcendentem dirigi concipiamus, vt planeta in puncto N ſupra planum AOB aſcendat, ſi ponamus angulum $AON = \zeta$, inclinationem vero orbitae $= \eta$, ſine vlteriori integratione ſtatim habemus has aequationes:

$$\text{cof. } \zeta \text{ ſin. } \eta = \frac{P}{\sqrt{f}} \text{ et ſin. } \zeta \text{ ſin. } \eta = \frac{Q}{\sqrt{f}};$$

vnde ſtatim pro poſitione lineae nodorum colligitur

$$\text{tang. } \zeta = \text{tang. } AON = \frac{Q}{P},$$

vnde cum ſit

$$\text{cof. } \zeta = \frac{P}{\sqrt{(PP+QQ)}},$$

erit pro inclinatione

$$\text{ſin. } \eta = \frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{\sqrt{f}},$$

vbi inclinatio η tam eſt exigua, vt ea a ſuo ſinu non diſcrepet.

§. 82. Hoc igitur modo ad quoduis tempus ab epocha elapſum non ſolum vera ſpecies elliptica, in qua planeta ſiue cometa tum mouebitur, verum etiam poſitio huius orbitae reſpectu plani fixi AOB aſſignari poterit; quibus rebus cognitis haud difficile erit, pro quouis tempore verum locum planetae ſiue cometae definire. Sicque quaeſtioni circa perturbationem motus tam planetarum quam cometarum ab actione quacunque aliorum corporum ortam ſatis expedite eſt ſatisfactum.

OBSER-

x quelles la Comète a été
au 20 May 1779.

à déterminer la position des étoiles incon-
Comète leur a été comparée.

---

le la vierge. Comète comparée le 14. Avril.
le la vierge.
Com. comparée le 13. Avril.
om. comparée le 12. Avril.
om. comparée le 11. Avril.
m. comparée les 5. & 6. Avril.
ies de la Caille & de Bradley.

d'Hercule. Comète compar. le 25. Mars.
2. voisines, déterm. par η du Bouvier &
arée les 22. 23. & 24. Mars.
de la Caille.
Bouvier.
. 14. Com. comparée le 14. Mars.
n. comparée les 12. & 13. Mars.

m. comparée le 11. Mars.
Bouvier. Com. comp. le 10. Mars,
Com. comparée les 7. 8. & 9. Mars.
Bouvier.
17. Com. comparée le 6. Mars.
d'Hercule.
du bouvier & ζ d'Hercule, Com. compa-

Com. compar. les 16. & 17. Fevr.

nparée le 17. Fevrier.

nète comp. les 31. Janv. & 8. Fevrier.

t de Bradley.

TABLE I.

Des ascenſions droites & des Déclinaiſons des étoiles aux quelles la Comète a eté comparée; ces poſitions ſont moyennes & réduites au 20 May 1779.

N°. des Etoiles dont la poſition a été déterminée.	Aſcenſion droite des Etoiles.			Déclinaiſon Boreale des Etoiles.			Grandeur.	Noms des Etoiles connues.	Noms des étoiles qui ont ſervi à déterminer la poſition des étoiles inconnues, & jours où la Comète leur a été comparée.
	D.	M.	S.	D.	M.	S.			
1	187.	36.	55	11.	38.	34	7	27	de la vierge déterminée par ε de la vierge. Comète comparée le 14. Avril.
2	187.	40.	47	11.	27.	25	5	ϱ	de la vierge, déterminée par ε de la vierge.
3	188.	13.	46	12.	7.	17	8	—	determinée par ε de la vierge. Com. comparée le 13. Avril.
4	188.	52.	25	12.	35.	20	—	—	déterm. par ε de la vierge. Com. comparée le 12. Avril.
5	189.	2.	2	13.	10.	21	7	—	déterm. par ε de la vierge. Com. comparée le 11. Avril.
6	192.	20.	20	15.	2.	58	8	—	déterm par ζ du Bouvier. Com. comparée les 5. & 6. Avril.
—	192.	48.	4	12.	9.	00	3	ε	de la vierge, priſe des Catalogues de la Caille & de Bradley.
7	193.	38.	28	15.	55.	8	—	—	déterminée par ζ du Bouvier.
8	194.	57.	44	14.	29.	52	—	—	déterminée par ε de la vierge.
9	196.	35.	29	14.	50.	42	—	—	déterminée par ε de la vierge.
10	200.	15.	52	20.	7.	8	—	—	déterm. par η du bouvier, & β d'Hercule. Comète compar. le 25. Mars.
11	202.	32.	10	21.	4.	53	6	1	du Bouvier, la plus Auſtrale de 2. voiſines, déterm. par η du Bouvier & β d'Hercule. Com. comparée les 22. 23. & 24. Mars.
—	206.	2.	38	19.	30.	56	3	η	du Bouvier, priſe du Catalogue de la Caille.
12	210.	5.	4	26.	8.	22	5	d	du Bouvier, déterm. par ε du Bouvier.
13	212.	37.	5	25.	45.	33	—	—	déterm. par ε du Bouvier & N°. 14. Com. comparée le 14. Mars.
14	213.	18.	11	26.	20.	36	7	—	déterm. par ε du Bouvier. Com. comparée les 12. & 13. Mars.
—	217.	39.	15	14.	41.	10	3	ζ	du Bouvier priſe de la Caille.
15	218.	1.	13	26.	56.	16	8	—	déterm. par ε du Bouvier. Com. comparée le 11. Mars.
16	218.	26.	3	27.	28.	32	6	34	du Bouvier, déterm. par ε du Bouvier. Com. comp. le 10. Mars.
—	218.	50.	22	28.	0.	51	3	ε	du Bouvier, priſe de la Caille. Com. comparée les 7. 8. & 9. Mars.
17	223.	45.	2	27.	49.	0	5	ψ	du Bouvier, déterm. par ε du Bouvier.
18	224.	0.	36	28.	21.	15	10	—	déterm. par ψ du Bouvier N°. 17. Com. comparée le 6. Mars.
19	224.	40.	5	29.	12.	11	—	—	déterm. par ε du Bouvier & ζ d'Hercule
20	229.	41.	10	29.	52.	28	4	β	de la couronne, déterm. par ε du bouvier & ζ d'Hercule. Com. comparée les 1. 2. & 3. Mars.
—	245.	11.	26	21.	59.	1	3	β	d'Hercule, priſe de la Caille.
—	248.	14.	59	32.	0.	40	3	ζ	d'Hercule, priſe de la Caille. Com. compar. les 16. & 17. Fevr.
21	248.	19.	2	32.	15.	40	10	—	déterminée par ζ d'Hercule.
22	248.	31.	24	32.	51.	44	9	—	déterm. par N°. 23. Com. comparée le 17. Fevrier.
23	249.	1.	54	32.	34.	30	10	—	déterminée par N°. 21.
24	269.	11.	52	33.	32.	32	7	—	déterminée par N°. 25.
25	270.	55.	29	33.	24.	42	6	—	déterm. par β de la lyre. Comète comp. les 31. Janv. & 8. Fevrier.
26	271.	1.	59	33.	15.	25	7	—	déterminée par N°. 25.
27	271.	13.	14	33.	15.	46	8	—	déterminée par N°. 25.
28	271.	29.	59	33.	19.	31	9	—	déterminée par N°. 25.
29	271.	31.	29	33.	24.	42	9	—	déterminée par N°. 25.
—	280.	29.	8	33.	7.	17	3	β	de la lyre priſe de la Caille & de Bradley.

Noms des étoiles aux quelles la Comète a été comparée.

ζpar 3 obſ. du N°. 25 au micromètre
ζpar 5 obſ. du même au quart de cercl.
ζpar 7 obſ. du N°. 15 au microm.
ζpar 5 obſerv. du même au quart de cerc.
par 6 obſerv. d'une étoile non déterminée.
par 4 obſ. d'une étoile non déterminée.
par 4 obſ. d'une étoile non déterminée.
par 2 obſ. de ζ d'Hercule au quart de cerc.
par 4 obſ. du N°. 22. au micromètre.
par 5 obſ. de ζ d'Hercule au quart de cerc.
par 6 obſ. de β de la couronne, N°. 20.
par 12 obſ. de β de la couronne, N°. 20.
par 10 obſ. de β de la couronne, N°. 20.
par 7 obſ. d'une étoile non déterminée.
par 3 obſ. d'une étoile non déterminée.
par 6 obſerv. du N°. 18.
par 3 obſ. de ε du bouvier.
par 5 obſerv. de ε du bouvier.
par 6 obſerv. de ε du bouvier.
par 9 obſ. de la 34e du bouvier ou N°. 16.
par 5 obſerv. du N°. 15.
par 6 obſerv. du N°. 14.
par 5 obſerv. du N°. 14.
par 5 obſ. du N°. 13.
par 7 obſ. de la 1e du bouvier ou N°. 11.
par 9 obſerv. du N°. 11.
par 13 obſ. du N°. 11.
par 8 obſ. du N°. 10.
par 7 obſ. d'une étoile non déterminée.
Comète comparée au Soleil au méridien.
par 6 obſerv. du N°. 6.
par 6 obſerv. du N°. 6.
par 2 obſerv. du N°. 5.
par 3 obſerv. du N°. 4.
par 4 obſerv. du N°. 3.
par 6 obſ. de la 27e de la vierge, ou N°. 1.
par 1 obſ. d'une étoile non déterminée.

TABLE II.

Des lieux apparens de la Comète de 1776.

1779.	Tems vrai à Géneve.	Tems moyen à Paris.	Différence en aſc. droite obſ. entre la Com. & les Etoiles.	Différence en Déclin. obſerv. entre la Com. & les Etoiles.	Aſcenſion droite apparente de la Comète.	Déclinaiſon Boreale apparente de la Comète.	Noms des étoiles aux quelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	
Janvr. 31	16. 38. 4	16. 37. 6	0. 36. 45 +	0. 4. 00 —	271. 31. 35	33. 20. 29	par 3 obſ. du N°. 25 au micromètre par 5 obſ. du même au quart de cercl.
Fevr. 1	14. 55. 55	14. 55. 4	0. 39. 25 —	0. 1. 42 +	270. 15. 29	33. 26. 10	par 7 obſ. du N°. 15 au microm. par 5 obſerv. du même au quart de cerc.
7	16. 4. 57	16. 4. 34	0. 15. 1 —	0. 10. 56 —	- - -	- - -	par 6 obſerv. d'une étoile non déterminée.
13	14. 31. 3	14. 30. 40	0. 29. 54 +	0. 2. 3 —	- - -	- - -	par 4 obſ. d'une étoile non déterminée.
16	13. 23. 18	13. 22. 45	0. 11. 14 —	0. 18. 16 +	- - -	- - -	par 4 obſ. d'une étoile non déterminée.
	13. 45. 46	13. 45. 12	1. 30. 20 +	1. 7. 12 +	249. 44. 56	33. 7 39	par 2 obſ. de ζ d'Hercule au quart de cerc.
17	12. 22. 46	12. 22. 8	0. 5. 7 — 0. 10. 15 +	0. 7. 40 + 0. 58. 21 +	248. 25. 51 248. 25. 1	32. 59. 11 32. 58. 48	par 4 obſ. du N°. 22. au micromètre. par 5 obſ. de ζ d'Hercule au quart de cerc.
Mars. 1	13. 25. 14	13. 22. 48	1. 26. 14 +	0. 27. 53 +	231. 7. 32	30. 20. 11	par 6 obſ. de β de la couronne, N°. 20.
2	12. 31. 44	12. 29. 5	0. 4. 16 +	0. 9. 52 +	229. 45. 14	30. 2. 10	par 12 obſ. de β de la couronne, N°. 20.
3	11. 53. 8	11. 50. 17	1. 19. 17 —	0. 8. 52 —	228. 21. 41	29. 43. 26	par 10 obſ. de β de la couronne, N°. 20.
5	11. 7. 46	11. 4. 27	0. 17. 14 —	0. 16. 24 —	- - -	- - -	par 7 obſ. d'une étoile non déterminée.
	11. 56 1	11. 52. 42	0. 52. 15 +	0. 20. 24 —	- - -	- - -	par 3 obſ. d'une étoile non déterminée.
6	11. 19. 19	11. 15. 56	0. 8. 0 +	0. 19. 17 +	224. 8. 27	28. 40. 24	par 6 obſerv. du N°. 18.
7	12. 17. 15	12. 13. 27	3. 51. 6 +	0. 15. 53 +	222. 41. 22	28. 16. 38	par 3 obſ. de ε du bouvier.
8	11. 39. 24	11. 35. 20	2. 31. 9 +	0. 6. 40 —	221. 21. 25	27. 54 4	par 5 obſerv. de ε du bouvier.
9	11. 1. 32	10. 57. 13	1. 11. 24 +	0. 30. 7 —	220. 1. 49	27. 30. 37	par 6 obſerv. de ε du bouvier.
10	10. 55. 34	10. 50. 59	0. 15. 9 +	0. 22. 19 —	218. 41. 6	27. 6. 6	par 9 obſ. de la 34^{e} du bouvier ou N°. 16.
11	12. 20. 2	12. 15. 10	0. 44. 49 —	0. 16. 20 —	217. 16. 18	26. 39. 49	par 5 obſerv. du N°. 15.
12	11. 59. 7	11. 53. 59	2. 41. 7 +	0. 6. 49 —	215. 59. 13	26. 13. 42	par 6 obſerv. du N°. 14.
13	11. 30. 9	11. 24. 44	1. 26. 10 +	0. 32. 58 —	214. 44. 16	25. 47. 33	par 5 obſerv. du N°. 14.
14	11. 19. 42	11. 14. 00	0. 49. 39 +	0. 24. 16 —	213. 26. 40	25. 21. 12	par 5 obſ. du N°. 13.
22	10. 57. 56	10. 49. 50	1. 43. 22 +	0. 31. 59 +	204. 15. 30	21. 36. 51	par 7 obſ. de la 1re du bouvier ou N°. 11.
23	10. 15. 48	10. 7. 25	0. 43. 49 —	0. 5. 25 +	203. 15. 57	21. 10. 17	par 9 obſerv. du N°. 11.
24	9. 49. 59	9. 41. 18	0. 14. 57 —	0. 21. 1 —	202. 17. 11	20. 43. 51	par 13 obſ. du N°. 11.
25	10. 18. 31	10. 9. 31	1. 2. 1 +	0. 7. 10 +	201. 17. 52	20. 14. 18	par 8 obſ. du N°. 10.
Avril. 3	8. 3. 49	7. 52. 4	0. 20. 43 +	0. 18. 6 +	- - -	- - -	par 7 obſ. d'une étoile non déterminée.
	12. 3. 47	11. 48. 50	- - - -	- - - -	193. 52. 14	- - -	Comète comparée au Soleil au méridien.
5	8. 36. 23	8. 24. 1	0. 16. 41 +	0. 19. 36 +	192. 37. 0	15. 22. 35	par 6 obſerv. du N°. 6.
6	8. 34. 14	8. 21. 35	0. 20. 21 —	0. 5. 3 —	191. 59. 58	14. 57. 56	par 6 obſerv. du N°. 6.
11	9. 21. 56	9. 7. 52	0. 11. 30 +	0. 10. 35 —	189. 13. 32	12. 59. 48	par 2 obſerv. du N°. 5.
12	8. 40. 0	8. 25. 40	0. 8. 40 —	0. 2. 38 +	188. 43. 44	12. 38. 0	par 3 obſerv. du N°. 4.
13	8. 50. 49	8. 36. 13	0. 2. 6 +	0. 7. 12 +	188. 15. 51	12. 14. 31	par 4 obſerv. du N°. 3.
14	8. 41. 47	8. 26. 56	0. 13. 1 +	0. 16. 3 +	187. 49. 55	11. 54. 39	par 6 obſ. de la 27e de la vierge, ou N°. 1.
May 6	11. 19. 47	11. 1. 6	0. 15. 0 +	0. 4. 14 —	- - -	- - -	par 1 obſ. d'une étoile non déterminée.

OBSERVATIONS ET CALCVLS DE LA COMÈTE DE 1779.

par

AND. MALLET.

Dès que nous fumes informés à Genève, à la fin du mois de Janvier 1779, de l'apparition de la Comète découverte à Berlin le 6, & à Paris le 19 du même mois, nous nous diſpoſames à l'obſerver, Mr. *Trembley*, Mr. *Pictet* & moi; nous la cherchames le 1^r. Fevrier, vers les trois heures du matin, par un tems aſſez ſerein & très froid, dans les environs de la Conſtellation de la Lyre, où nous jugeames qu'elle devoit être, d'après ſa poſition & ſon mouvement déterminés à Paris, 8 à 10 jours auparavant; nous la trouvames bientot entre la Lyre & Hercule, elle paroiſſoit ſous la forme d'une nébuloſité blanchatre, le clair de lune très brillant empêchoit qu'on ne diſtinguat de queue, on la voyoit très bien avec des lunettes achromatiques ordinaires de 3 pieds, mais elle

disparoissoit pour peu qu'on ajoutat à la lumiere de la Lune pour éclairer les fils de la lunette: Nous la comparames à une petite étoile inconnue de 6 ou 7e grandeur, qui en étoit très près; nous fimes deux sortes d'observations, les premières en employant une excellente lunette achromatique à triple objectif, de *Dollond*, grossissant 56 fois, & garnie d'un micrométre filaire fait aussi par *Dollond*, nous observames plusieurs fois les différences d'ascension droite & de déclinaison entre la Comète & l'étoile.

Notre pendule faite à Londres par *Shelton*, étoit réglée sur le mouvement des étoiles, & vérifiée chaque jour par des observations du Soleil & des étoiles à une lunette méridienne très exactement & solidement établie.

Tandis que l'un de nous se servoit ainsi du micromètre, un autre observoit les passages de la Comète & de l'étoile au fil horizontal & au fil vertical de la lunette de notre quart de cercle, la proximité des deux astres permettoit de faire ces quatre observations, sans être obligé de changer la hauteur ni l'azimuth de la lunette.

Le 2, nous comparames plusieurs fois la Comète à la même étoile que le jour précédent, & de la même manière. Elle avoit la même apparence, nous essayames differens oculaires, celui qui ne grossit que 70 fois la faisoit voir plus distinctement que le plus fort qui augmente de 135 fois le diamètre des objets, on avoit cependant de la peine à distinguer le noyau, de la nebulosité.

Les

Les jours suivans, le tems fut couvert, nous ne pûmes continuer nos observations que le 8 au matin; la Comète nous parut plus brillante que les jours précedens, elle avoit une legère apparence de queue; nous ne pûmes la comparer qu'à une très petite étoile inconnue de 8 ou 9e grandeur.

La nuit du 13 au 14, le tems s'éclaircit pour la première fois depuis le 8; nous retrouvames la Comète peu eloignée de l'etoile ε d'Hercule, mais encore trop pour pouvoir lui être comparée, il fallut se servir d'une petite étoile inconnue de 4 à 5e grandeur; la Comète paroissoit avoir plutot diminué qu'augmenté en lumière depuis les dernières observations.

Le 17, au matin, La Comète étoit plus apparente que le 14, on la compara au quart de cercle avec ζ d'Hercule, mais le champ de la lunette garnie du micromètre, n'étant que d'environ d'un demidegré on ne put observer avec celle-cy qu'une petite étoile de 6 à 7e grandeur.

Le 18, on compara encore la Comète à ζ d'Hercule au quart de cercle, mais avec le micromètre, il fallut employer une novelle étoile inconnue dont on eut beaucoup de peine à déterminer la position par rapport à ζ, à cause de la petiteſſe des étoiles intermédiaires qu'on voyoit à peine dans la lunette:

Le 27, quoique le tems parut assez serein, nous cherchames inutilement la Comète, avec une très bonne lunette

lunette de nuit achromatique de 3 pieds, & ſurement dans l'endroit où elle étoit réellement, ce qui nous fit préſumer qu'elle avoit diſparu pour nous.

Le 1^r^ Mars, par une nuit très claire, & la Lune à peu près pleine, nous fimes encore quelques tentatives, en employant la lunette acromatique à triple objectif, & nous retrouvames la Comète aſſez près de β de la Couronne, à la quelle elle fut comparée, mais ſoit à cauſe du clair de Lune, ou de la diminution réelle dans la Comète, on ne pouvoit plus la voir à la lunette du quart de cercle.

Les deux nuits ſuivantes, la Comète fut encore comparée à β de la Couronne. Le 5, on la compara à deux étoiles inconnues, & le 6, à une très petite étoile inconnue qu'on avoit beaucoup de peine à voir avec la lunette, & dont on détermina la poſition rélativement à ψ du Bouvier.

Les 7. 8 & 9. la Comète fut comparée à ε du Bouvier.

Le 10, elle fut comparée à une petite étoile de 6e grandeur, qui s'eſt trouvée la 34e du Bouvier, ſuivant *Flamſtead*, ſa poſition fut determinée par celle de ε.

Les 11, 12, 13 & 14, on compara la Comète à de nouvelles petites étoiles, dont on détermina la poſition par celle de ε du Bouvier.

Nous

Nous ne pumes la revoir que le 22, qu'elle fut comparée à une étoile de 6e grandeur qui eſt la 1e du Bouvier ſuivant *Flamſtead.*

Les 23 et 24, la Comète fut encore comparée à la même étoile, les obſervations commencoient à devenir difficiles à cauſe du peu de lumière de la Comète, & elles l'étoient encore davantage, lorsque la Comète précédoit l'étoile, parce qu'étant obligés de lui faire ſuivre le fil fixe du micromètre, ainſi cachée en partie derriere ce fil, on diſtinguoit plus difficilement ſon paſſage au fil horaire.

Le 25, la Comète fut comparée à une nouvelle étoile inconnue.

Nous ne la revimes que le 3 Avril, peu eloignée de ε de la vierge, ſa lumière étoit encore plus foible que les jours précédens, & diſparoiſſoit des qu'on vouloit éclairer les fils.

Nous l'obſervames cependant encore, le 5, 6, 11, 12, 13 et 14 Avril, avec beaucoup de peine, en la comparant chaque jour à une nouvelle étoile, celle du 14 eſt la ſeule connue, c'eſt la 27e de la vierge, très près de ϱ de la vierge.

Le 25, on entrevit la Comète quelques inſtans, très près du paralléle de ϱ de la vierge, mais le tems ſe couvrit, on ne put faire aucune obſervation.

Enfin nous la revimes encore, mais pour la dernière fois le 6 May, elle fut comparée deux fois à une étoile inconnue, avec une peine infinie. On ne la découvroit, ou pour mieux dire, on ne la soupçonnoit que dans une parfaite obscurité du champ de la lunette, & après avoir eu longtems les yeux reposés à l'abri de toute lumière.

Ce fut là notre 31e. jour d'observation, pendant un espace de 95 jours. Parmi les étoiles aux quelles la Comète a été comparée pendant le cours de nos observations, il n'y en a que deux, savoir ζ d'Hercule & ε du Bouvier qui se trouvent dans les Catalogues de *la Caille* ou de *Bradley*, & sur la position des quelles on puisse compter, il a donc fallu déterminer la position des 22 autres, quelques unes l'ont été tout de suite dans les intervalles des observations de la Comète, en les comparant par le micron-ètre, avec des étoiles connues, mais on fut obligé pour les autres de renvoyer ce travail à un autre tems, afin de pouvoir les observer à la lunette méridienne & au quart de cercle, ce renvoi a été cause que six d'entr'elles n'ont pu être reconnues avec assez de certitude, ce sont celles aux quelles la Comète fut comparée les 7 & 13 Fevrier, 5 Mars, 3 Avril & 6 May.

La Table I. contient les résultats de toutes les observations faites pour déterminer ces positions d'étoiles, plusieurs ont été observées au méridien, & au moins deux fois chacune, on y trouve les ascensions droites & déclinaisons moyennes de 36 étoiles, toutes réduites à la même époque, savoir au 30 May 1779, il y en a 7 dont les

les positions fondamentales ont été prises dans les Catalogues de *la Caille* & *de Bradley*, ce sont celles aux quelles les 29 autres ont été comparées, celles-cy sont désignées par les 29 Numeros de la première colonne, la 4e colonne qui contient la grandeur des étoiles a quelques lacunes, mais on peut être sur que celles qu'on a omises sont au dessous de la 5. ou 6. grandeur.

La Table II. contient les lieux apparens de la Comète, c'est à dire les ascensions droites & déclinaisons déduites des observations. J'ai reduit pour chaque jour à une seule époque toutes les comparaisons faites dans la même nuit de la Comète à une même étoile, en employant le mouvement de la Comète tant en ascension droite qu'en déclinaison, tiré des observations mêmes, & j'ai pris une moyenne entre les differens résultats, rejettant les observations marquées comme douteuses, & donnant plus de poids à celles qu'on avoit eu soin de désigner comme les meilleures.

Cette époque est réduite en Tems vrai de Genève, & en tems moyen de Paris, en prenant 15 minutes de tems pour la différence des méridiens.

Les Colonnes 4e. & 5e. contiennent les différences d'ascension droite & de Déclinaison observées entre la Comète & les étoiles aux quelles elle a été comparée, le signe + indique que cette différence doit être ajoutée à la position de l'étoile pour avoir celle de la Comète, & le signe — qu'elle doit en être retranchée, mais il faut observer, qu'il s'agit ici de la position apparente de ces étoi-

les, calculée pour le jour où s'eſt faite l'obſervation, & non pas de la poſition moyenne contenue dans la Table I.; il a fallu appliquer à cette poſition moyenne du 20 May, la quantité de préceſſion, d'aberration & de nutation convenable à chaque étoile pour avoir ſa poſition apparente le jour de l'obſervation. Après avoir ainſi conclu des obſervations, les aſcenſions droites & déclinaiſons de la Comète, j'en ai deduit pour chaque époque, ſa Longitude & ſa Latitude Géocentrique, je me ſuis ſervi pour cela des Tables Solaires de *Mayer* imprimées à Berlin en 1776.

Mon intention étoit de calculer d'après ces réſultats les Elémens de l'orbite de la Comète, j'avois deja commencé ce travail, lorsque le volume des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année 1779, m'étant parvenu, j'y ai trouvé l'excellent Mémoire de Mr. *Meſſier* ſur le mouvement de cette Comète, à la fin duquel il rapporte les Elémens de ſon orbite déterminés par différens Aſtronomes. Mr. le *Chevalier d'Angos* les a calculés d'après 65 obſervations de Mr. *Meſſier*, & donne une Table des différences entre les poſitions obſervées & les poſitions calculées; j'ai cru d'après cela qu'il ſeroit inutile de rechercher de nouveau ces Elémens d'après nos ſeules obſervations, & qu'il ſuffiſoit de calculer, d'après les Elémens trouvés par Mr. *d'Angos*, le lieu de la Comète pour chacune de nos époques, & que la comparaiſon du lieu obſervé au lieu calculé, ſerviroit de vérification à ces Elémens, ou nous indiqueroit les changemens à y faire d'après nos obſervations, c'eſt ce nouveau travail que je préſente dans la Table III. On verra par les différences trouvées, que nos obſervations s'accordent on ne peut pas mieux

mieux avec l'orbite ainſi calculée, il y a même lieu de s'étonner de ce degré de préciſion, vû la difficulté avec la quelle on obſervait la Comète à la fin de ſon apparition: De 26 obſervations, il n'y en a que neuf qui different du calcul de plus d'une minute, pour la Longitude & trois ſeulement, pour la Latitude & le plus grand écart ne va pas à une minute & deuxtiers.

Ces Elémens déterminés par Mr. le Chevalier *d'Angos* ſont:

Lieu du Noeud aſcendant - -	$0^s.\ 25^\circ.\ 3'.\ 57''.$
Inclinaiſon de l'orbite - -	32. 25. 30.
Lieu du Périhélie dans l'orbite	11. 27. 13. 40.
Diſtance Perihélie - - - -	0, 713187.
Paſſage au périhélie, Janvier 1779.	$4^j.\ 2^h.\ 24'.\ 30''.$

Le mouvement vrai de la Comète autour du Soleil, s'eſt fait ſelon l'ordre des ſignes, ſon oppoſition avec le Soleil a eu lieu le 29 Mars. Depuis le moment de ſon apparition, elle s'eſt toujours approchée de la Terre juſqu'au 12 Fevrier, ſa plus courte diſtance étoit alors $= 0, 506$ égale à environ la moitié de la diſtance moyenne de la Terre au Soleil; depuis ce moment-là elle s'en eſt éloignée, & au 17 May, date de la dernière obſervation de Mr. *Meſſier*, que l'on peut regarder comme l'époque de la diſparition de la Comète pour les meilleures lunettes, ſa diſtance de la Terre étoit 1, 606 & ſa diſtance du Soleil 2, 370.

TABLE III.

des positions de la Comète deduites des observations de Geneve, & comparees aux positions calculees d'après les Elémens d'une orbite parabolique, que Mr. le *Chevalier d'Angos* a conclu du 65 observations faites à Paris par Mr. *Messier*.

1779.	Tems moyen à Paris.	Longitudes de la Comète observées.	Longitudes de la Comète calculées.	Latitudes de la Com. observées.	Latitudes de la Com. calculées.	Différences. en longit.	Différences. en latitud.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Janvr. 31	16. 37. 6	272. 19. 45	272. 21. 22	56. 47. 57	56. 47. 30	+ 1. 37	— 0. 27
Fevr. 1	14. 55. 4	270. 23. 40	270. 25. 15	56. 54. 51	56. 54. 20	+ 1. 35	— 0. 31
16	13. 45. 12	240. 2. 51	240. 2. 24	54. 30. 32	54. 29. 54	— 0. 27	— 0. 38
17	12. 22. 8	238. 15. 41	238. 14. 45	54. 5. 55	54. 6. 28	— 0. 56	+ 0. 33
Mars 1	13. 22. 48	217. 29. 2	217. 29. 25	46. 57. 42	46. 58. 19	+ 1. 23	+ 0. 37
2	12. 29. 5	216. 1. 35	216. 2. 8	46. 14. 42	46. 15. 3	+ 0. 33	+ 0. 21
3	11. 50. 17	214. 35. 12	214. 35. 55	45. 30. 10	45. 30. 12	+ 0. 43	+ 0. 2
6	11. 15. 56	210. 23. 53	210. 25. 9	43. 6. 56	43. 7. 10	+ 1. 16	+ 0. 14
7	12. 13. 27	209. 0. 56	209. 2. 10	42. 14. 57	42. 15. 26	+ 1. 14	+ 0. 29
8	11. 35. 20	207. 46. 2	207. 46. 40	41. 26. 14	41. 26. 11	+ 0. 38	— 0. 3
9	10. 57. 13	206. 32. 43	206. 33. 41	40. 36. 29	40. 36. 32	+ 0. 58	+ 0. 3
10	10. 50. 59	205. 19. 47	205. 20. 11	39. 45. 15	39. 45. 17	+ 0. 24	+ 0. 2
11	12. 15. 10	204. 4. 19	204. 5. 27	38. 50. 19	38. 50. 9	+ 1. 8	— 0. 10
12	11. 53. 59	202. 57. 30	202. 58. 12	37. 58. 29	37. 58. 51	+ 0. 42	+ 0. 22
13	11. 24. 44	201. 53. 31	201. 52. 45	37. 7. 3	37. 7. 6	— 0. 46	+ 0. 3
14	11. 14. 00	200. 47. 28	200. 48. 56	36. 14. 13	36. 14. 51	+ 1. 28	+ 0. 38
22	10. 49. 50	193. 30. 39	193. 30. 29	29. 20. 27	29. 21. 32	— 0. 10	+ 1. 5
23	10. 7. 25	192. 45. 41	192. 45. 48	28. 33. 12	28. 33. 14	+ 0. 7	+ 0. 2
24	9. 41. 18	192. 1. 35	192. 2. 23	27. 46. 19	27. 45. 6	+ 0. 48	— 1. 13
25	10. 9. 31	191. 18. 33	191. 19. 3	26. 56. 18	26. 55. 30	+ 0. 30	— 0. 48
Avril 5	8. 24. 1	185. 19. 4	185. 20. 24	19. 5. 35	19. 4. 51	+ 1. 20	— 0. 44
6	8. 21. 35	184. 55. 21	184. 55. 38	18. 28. 24	18. 27. 43	+ 0. 17	— 0. 41
11	9. 7. 52	183. 11. 49	183. 10. 58	15. 34. 31	15. 33. 5	— 0. 51	— 1. 26
12	8. 25. 40	182. 53. 32	182. 53. 56	15. 2. 46	15. 2. 9	+ 0. 24	— 0. 37
13	8. 56. 13	182. 37. 44	182. 37. 10	14. 30. 21	14. 30. 45	— 0. 34	+ 0. 24
14	8. 26. 56	182. 22. 9	182. 22. 22	14. 1. 45	14. 0. 53	+ 0. 13	— 0. 52

SOLU-

SOLUTION
D'UNE
QUESTION ASTRONOMIQUE.

Par
A. J. LEXELL.

§. 1.

La queſtion Aſtronomique dont je me propoſe de donner ici la ſolution eſt celle: de déterminer lequel des deux bords de la Lune, le ſuperieur ou l'inferieur, il faut obſerver dans le paſſage de la Lune par le Méridien, ou même par un autre cercle horaire quelconque. L'Hemisphère de la Lune tourné vers le Soleil, faiſant la partie éclairée de la Lune, il eſt évident que ſi par le centre de cet aſtre on ſuppoſe tiré un plan perpendiculaire à la droite, qui joint les deux centres du Soleil & de la Lune, ce plan coupera dans la ſurface de la Lune un cercle, qui ſera à peu près la ſeparation de l'Hemiſphère éclairé de la Lune de l'Hemiſphère obſcur. De même il eſt clair, que ſi par le centre de la Lune on tire un plan perpendiculaire à la droite qui joint les centres de la Lune & de la Terre, l'Hemiſphère de la Lune

Lune coupé par ce plan ſera le ſeul viſible aux habitans de la terre. Par là on conclut que la ligne droite qui ſépare la partie éclairée de la face de la Lune de l'obſcure, en la ſuppoſant tirée par les deux cornes de la Lune, ſera l'interſection des deux plans mentionés & que par conſequent elle ſera perpendiculaire ſur les lignes droites, qui joignent le centre de la Lune avec ceux du Soleil & de la terre, c'eſt à dire que cette droite ſera perpendiculaire ſur le plan, qui paſſe par les centres des trois Aſtres.

Tab. X. Fig. 5.

§. 2. Soit P le Pole Boreale de l'équateur, P L le Méridien ou un autre cercle horaire quelconque, dans lequel le centre de la Lune ſe trouve en L, ſoit S le lieu du centre du Soleil & ayant tiré les arcs de grands cercles P S, L S, on voit que la reponſe à la queſtion propoſée ſe reduit à chercher la valeur de l'angle P L S. Car ſi l'on ſuppoſe tiré l'arc de grand cercle L M perpendiculaire à L S, il eſt clair que la ligne droite qu'on ſuppoſe tirée ſur la face de la Lune par les deux cornes, ſera la tangente de cet arc; donc l'angle P L M ou l'angle que la droite qui paſſe par les cornes fait avec le cercle horaire, ſera déterminé par le moyen de l'angle P L S. Or nommant le complément de la déclinaiſon du Soleil, ou l'arc $P S = d$, le complément de la Déclinaiſon de la Lune $P L = \delta$, l'arc L S ou la différence entre la Longitude de la Lune & celle du Soleil, comptée ſur le grand cercle, qui joint les centres de ces Aſtres $= b$, enfin l'angle $P L S = \eta$, on aura par la Trigonometrie Sphérique:

$$\text{cof. } \eta = \frac{\text{cof. } d - \text{cof. } \delta \text{ cof. } b}{\text{ſin. } b \text{ ſin. } \delta}.$$

§. 3.

§. 3. Il s'agit donc ici de déterminer ſi le cof. η eſt poſitif ou negatif, pour des valeurs connues de b, δ, d. Suppoſons d'abord que b ſoit $< 90°$, dans le quel cas ſon cofinus & ſon ſinus ſeront tous deux poſitifs; donc ſi 1°. $d < 90$; $\delta < 90$; on aura cof. η poſitif, lorsque cof. $d >$ cof. δ cof. b, c'eſt à dire lorsque cof. $b < \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$. 2°. Soit $d < 90$; $\delta > 90$; & alors cette expreſſion cof. d — cof. δ cof. b aura toujours une valeur poſitive, par conſequent cof. η eſt poſitif, ou l'angle P L S aigu. 3°. Soit $d > 90°$; $\delta < 90°$; on aura cof. d — cof. δ cof. b negatif, donc cof. η dans tous les cas negatif et par conſéquent l'angle P L S obtus. 4°. Soit $d > 90°$; $\delta > 90°$; il ſera cof. d — cof. δ cof. b poſitif ou negatif, ſelon que cof. δ cof. $b >$ ou $<$ que cof. d; c'eſt à dire ſelon que cof. $b \gtrless \frac{\text{co. } d}{\text{cof. } \delta}$. Le *ſecond cas général* eſt celui où l'arc b eſt plus grand que 90° & plus petit que 180°, par conſequent ſin. b poſitif & cof. b negatif. Suppoſons 1°. $\delta < 90°$; $d < 90°$, il ſera toujours cof. d — cof. δ cof. b poſitif, donc l'angle P L S eſt aigu. 2°. Pour $\delta > 90$; $d < 90$; cof. d — cof. δ cof. b ſera poſitif ou negatif ſelon que cof. $b \lessgtr \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$. 3°. Pour $d > 90$; $\delta < 90°$; cof. η poſitif ou negatif, ſelon que cof. $b \gtrless \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$. Enfin 4°. pour $d > 90$; $\delta > 90°$; cof. d — cof. δ cof. b eſt negatif, donc l'angle P L S reſte toujours obtus. Le *troiſième cas général* pour lequel $b > 180°$ et $< 270°$, ſe réduit au cas ſecond, en changeant les ſignes; ainſi par exemple lorsque $\delta < 90$; $d < 90°$ on aura toujours cof. η negatif. De même le *quatrième cas* général, lorsque $b > 270°$; $b < 360°$ ſe réduit par le changement des ſignes au premier.

§. 4. Voyons à préſent quelle application on fera de ces règles établies pour le paſſage de la Lune par un

cercle horaire. Il faut d'abord remarquer que ſi le bord éclaire de la Lune précède, ce qui arrive toujours dans les deux premiers quartiers, ou avant la pleine Lune paſſée, il faut prendre le bord ſuperieur lorsque l'angle P L S eſt aigu, parcequ' alors l'arc de cercle P L tombe entre L M et L S & qu'il faut obſerver le bord inferieur lorsque cet angle P L S eſt obtus. Après la pleine Lune, ou dans les deux derniers quartiers, c'eſt la partie obſcure de la Lune qui paſſe la première par un cercle horaire, donc en comptant l'arc L S ſelon les ordres des ſignes, on voit qu'il faut encore prendre le bord inferieur lorsque l'angle P L S eſt aigu, & le ſuperieur lorsqu'il eſt obtus. Dans le premier quartier les Déclinaiſons du Soleil & de la Lune étant ſuppoſées Boréales, il faut donc obſerver le bord ſuperieur, lorsque $\text{cof. } b < \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$, & l'inferieur lorsque $\text{cof. } b > \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$. Si la déclinaiſon de la Lune eſt auſtrale, celle du Soleil étant Boréale, il faut toujours obſerver le bord ſuperieur; mais au contraire la Declinaiſon de la Lune étant Auſtrale, celle du Soleil Boréale, il faut obſerver le bord inferieur. Enfin les deux déclinaiſons étant Auſtrales il faut obſerver le bord ſuperieur ou l'inferieur, ſelon que $\text{cof. } b \gtrless \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$. Dans le *ſecond quartier*, les deux déclinaiſons étant Boréales, il faut prendre le bord ſuperieur; la déclinaiſon de la Lune étant Auſtrale, celle du Soleil Boréale, il faut obſerver le bord ſuperieur ou inferieur ſelon que $\text{cof. } b \lessgtr \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$. Au contraire ſi la déclinaiſon du Soleil eſt Auſtrale & celle de la Lune Boréale, il faut obſerver le bord inferieur ou ſuperieur ſelon

que

que cof. $b \gtrless \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$. Enfin les deux déclinaiſons étant Auſtrales on obſervera le bord inferieur. Pour le *troiſième quartier* on n'a qu'à ſuivre les règles préſcrites pour le ſecond, & pour le *quatrième* les règles données pour le *premier*, en prenant toujours le bord inferieur lorsqu'il eſt preſcrit de le prendre pour les deux premiers quartiers & le ſuperieur lorsqu'il eſt préſcrit de le prendre par les régles déjà données.

§. 5. Lorsqu'il s'agit de faire uſage de ces Règles dans la Pratique, il ſuffit presque toujours de ſubſtituer au lieu de l'arc L S, ou la diſtance des centres du Soleil & de la Lune, la difference des Longitudes de ces deux Aſtres, & à l'ordinaire il n'y a point d'ambiguité, que lorsque cof. $d = \text{cof. } \delta$ étant alors arbitraire pour les cas, où il faut ſe regler ſelon que cof. $b \gtrless \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$, de prendre le bord ſuperieur ou inferieur. Afin de rendre plus commode l'uſage des Règles établies ci-deſſus, nous en préſenterons les réſultats dans une Table, qui à la première vüe mettra chacun en état de juger lequel des deux bords de la Lune il faut obſerver:

Pour la déclinaiſon du Soleil Boréale.

Dans le premier & dernier quartier, l'arc b étant compris entre 0 & 90, ou entre 270° & 360°.

Déclin. ☽ Boreal.	Declin. ☽ Auſtr.
Bord ſuperieur ſi cof. $b < \frac{cof. d}{cof. \delta}$. Bord inferieur ſi cof. $b > \frac{cof. d}{cof. \delta}$.	Bord ſuperieur

Dans le ſecond & troiſième quartier, l'arc b étant compris entre 90° & 270°.

Déclin. ☽ Boréal.	Déclin. ☽ Auſtr.
Bord ſuperieur	Bord ſuperieur ſi cof. $b < \frac{cof. d}{cof. \delta}$. Bord inferieur ſi cof. $b > \frac{cof. d}{cof. \delta}$.

Pour la déclinaiſon du Soleil Auſtrale.

Dans le premier & dernier quartier, l'art b étant compris entre 0 & 90°, ou entre 270° & 360°.

Declin. ☽ Boreal.	Declin. ☽ Auſtr.
Bord inferieur	Bord ſuperieur ſi cof. $b > \frac{cof. d}{cof. \delta}$. Bord inferieur ſi cof. $b < \frac{cof. d}{cof. \delta}$.

Dans le ſecond & troiſième quartier, l'arc b étant compris entre 90° & 270°.

Declin. ☽ Boreal.	Déclin. ☽ Auſtr.
Bord ſuperieur ſi cof. $b > \frac{cof. d}{cof. \delta}$. Bord inferieur ſi cof $b < \frac{cof. d}{cof. \delta}$.	Bord inferieur

§. 6. J'ai fait choix de la formule

$$\text{cof. } \eta = \frac{\text{cof. } d - \text{cof. } \delta \text{ cof. } b}{\text{ſin. } \delta \text{ ſin. } b},$$

pour déterminer l'angle η parce qu'elle paroît être la plus propre à découvrir ſi cof. η eſt poſitif, ou negatif, c'eſt à dire ſi l'angle η eſt compris entre 0 et 90°, ou entre 90°

90° et 180°. S'il étoit queſtion de chercher effectivement l'angle η, on pourroit faire uſage des formules encore plus commodes, comme par exemple de celle-ci:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(d+b-\delta)\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(d-b+\delta)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(d+b+\delta)\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(b+\delta-d)}}.$$

D'ailleurs on peut trouver encore une autre ſolution de la queſtion propoſée, ſi au lieu de ſuppoſer l'arc L S connu, on ſuppoſe donnée la difference des aſcenſions droites du Soleil & de la Lune ou l'angle P L S que je nommerai α. Alors il ſera

$$\text{cot. P L S} = \frac{\text{coſ. P S. ſin. P L} - \text{ſin. P S coſ. P L coſ. L P S}}{\text{ſin. P S ſin. L P S}}$$

c'eſt à dire

$$\text{cot. } \eta = \frac{\text{coſ. } d\ \text{ſin. } \delta - \text{coſ. } \delta\ \text{ſin. } d\ \text{coſ. } \alpha}{\text{ſin. } d\ \text{ſin. } \alpha} = \frac{\text{cot. } d\ \text{ſin. } \delta}{\text{ſin. } \alpha} - \text{cot. } \alpha\ \text{coſ. } \delta.$$

Dans cette ſolution l'angle P L S $= \eta$ ſera aigu ou obtus, ſelon que cot. η eſt poſitif, ou negatif. Suppoſant donc $\alpha < 90°$; cot. η ſera poſitif lorsque cot. d ſin. $\delta >$ coſ. α coſ. δ, ou bien cot. d tang. $\delta >$ coſ. α, & negatif lorsque

$$\text{cot. } d\ \text{tang. } \delta < \text{coſ. } \alpha.$$

Par conſequent pour δ et $d < 90°$; cot. η eſt poſitif lorsque cot. d tang. $\delta >$ coſ. α et negatif lorsque cot. d tang. $\delta <$ coſ. α. Pour $\delta > 90$; $d < 90$; cot. η eſt poſitif, puisque l'expreſſion coſ. d ſin. $\delta -$ ſin. d coſ. δ coſ. α ſera toujours poſitive. Si $d > 90$; $\delta < 90°$; cot. η ſera negatif, puisque l'expreſſion coſ. d ſin. $\delta -$ ſin. d coſ. δ coſ. α eſt negative. Enfin pour $d > 90°$; $\delta > 90°$; l'angle η ſera poſitif ſi cot. d tang. $\delta >$ coſ. α, & negatif ſi cot. d tang. $\delta <$ coſ. α. Lorsque l'angle $\alpha > 90°$ et $< 180°$, ſon Coſinus eſt negatif, donc pour d et $\delta < 90°$, cot. η ſera poſitif; pour $d < 90°$; $\delta > 90°$; cot. η ſera poſitif ou negatif ſelon que

$$\text{cot. } d \text{ tang. } \delta \gtrless \text{cof. } \alpha.$$

Pour $d \gtrless 90°$; $\delta \lessgtr 90°$; cot. η ſera poſitif ou negatif ſelon que

$$\text{cot. } d \text{ tang. } \delta \lessgtr \text{cof. } \alpha.$$

Enfin lorſque $d \gtrless 90°$; $\delta \gtrless 90°$; cot. η ſera negatif. Il eſt encore aiſé de prouver que les conditions préſcrites dans cette ſolution, reviennent en effet à celles de la première, car cof. α étant $= \frac{\text{cof. } b - \text{cof. } d \text{ cof. } \delta}{\text{ſin. } d \text{ ſin. } \delta}$ lorſque

$$\text{cot. } d \text{ tang. } \delta \gtrless \text{cof. } a,$$

il eſt auſſi

$$\text{cot. } d \text{ tang } \delta \gtrless \frac{\text{cof. } b - \text{cof. } d \text{ cof. } \delta}{\text{ſin. } d \text{ ſin. } \delta}, \text{ ou}$$

$$\frac{\text{cof. } d \text{ ſin. } \delta^2}{\text{cof. } \delta} + \text{cof. } \delta \text{ cof. } d \gtrless \text{cof. } b,$$

donc à cauſe de ſin. δ^2 + cof. $\delta^2 = 1$; $\frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta} \gtrless$ cof. b, qui eſt la condition préſcrite dans la première ſolution.

§. 7. Comme dans le paſſage de la Lune par un cercle horaire le point L ne marque pas préciſement le vrai lieu du centre de la Lune, mais ſon lieu apparent en tant qu'il eſt affecté par la Parallaxe & la refraction de la Lune; il faudroit donc dans des cas ambigus faire un peu attention à cette circonſtance, en faiſant le calcul des effets de la Parallaxe & de la refraction de la Lune, & par ce moyen on trouveroit auſſi la correction dont l'arc L S eſt affecté. Sur tout il faudroit examiner en quelle ma-
Tab. X. Fig. 6. nière l'angle P L M eſt changé par la Parallaxe & la refraction. Soit Z le point du ciel, qui eſt ſur la ligne droite tirée par le centre de la terre & le lieu de l'obſervateur, L le lieu vrai du centre de la Lune, L M la ligne

ligne qui paſſe par les cornes de la Lune; ayant joint PZ, ZL, ZM, & continué les deux derniers arcs en L', M' en ſorte que L L', M M' repreſentent les Parallaxes pour L et M, qu'on joigne enfin PL, PL', L'M', par des arcs de grands cercles, la queſtion eſt de trouver l'angle P L' M', ce qui ſe fera en cherchant de combien l'angle P L Z ſurpaſſe P L'Z & l'angle Z L M celui de Z L' M'. Or puiſque l'arc L L' ou l'effet de la Parallaxe eſt fort petit, on trouvera l'expreſſion de la difference entre P L Z, P L'Z, en prenant la differentielle de cette équation:

$$\text{cot. Z L P} = \frac{\text{cof. P Z ſin. Z L} - \text{ſin. P Z cof. Z L cof. P Z L}}{\text{ſin. P Z ſin. P Z L}}$$
$$= \frac{\text{cof. P Z ſin. Z L}}{\text{ſin. P Z L}} - \text{cof. Z L cot. P Z L};$$

en ſuppoſant ſeulement l'arc Z L et l'angle Z L P variables. De là on trouvera:

$$-\frac{d.\ Z\ L\ P}{\text{ſin. Z L P}^2} = d.\,Z\,L\,\frac{\text{cof. P Z cof. Z L}}{\text{ſin. P Z L}} + d.\,Z\,L.\ \text{ſin. Z L cot. P Z L}$$
$$= d.\,Z\,L\,\frac{(\text{cof. P Z cof. Z L} + \text{ſin. P Z ſin. Z}^2\ \text{cof. P Z L})}{\text{ſin. P Z ſin. P Z L}};$$

d'où à cauſe de

$$\text{cof. P L} = \text{cof. P Z cof. Z L} + \text{ſin. P Z ſin. Z L cof. P Z L et}$$
$$\text{ſin. P Z ſin. P Z L} = \text{ſin. P L. ſin. Z L P};$$

$d.\ Z\,L = L\,L'$; on aura

$$-d\ Z\,L\,P = L\,L'.\ \text{cot. P Z ſin. Z L P},$$

par conſequent

$$Z\,L'\,P = Z\,L\,P - L\,L'.\ \text{cot. P L. ſin. Z L P.}$$

Enſuite puiſqu'il eſt:

$$\text{cot. Z L M} = \frac{\text{cof. Z M ſin. Z L} - \text{ſin. Z M cof. Z L cof. L Z M}}{\text{ſin. Z M ſin. L Z M}},$$

en prenant la differentielle & ſuppoſant les arcs Z L, Z M variables, l'angle L Z M étant conſtant, on a:

$-d.$

$$-\frac{d.\,Z\,L\,M}{\mathit{fin.}\,Z\,L\,M^2} = -\frac{d.\,Z\,M.\,\mathit{fin.}\,Z\,L}{\mathit{fin.}\,Z\,M\,.\,\mathit{fin.}\,L\,Z\,M} + a.\,Z\,L\,\frac{\mathit{cof.}\,Z\,M.\,\mathit{co.}\,Z\,L}{\mathit{fin.}\,L\,Z\,M} + d.\,Z\,L.\,\mathit{fin.}\,Z\,L.\,\mathit{cot.}\,Z\,L\,M$$
$$= \frac{-d.\,Z\,M.\,\mathit{fin.}\,Z\,L}{\mathit{fin.}\,Z\,M^2.\,\mathit{fin.}\,L\,Z\,M} + \frac{d.\,Z\,L\,\mathit{cof.}\,L\,M}{\mathit{fin.}\,Z\,M\,\mathit{fin.}\,L\,Z\,M};$$

à cauſe de

$$\mathit{cof.}\,L\,M = \mathit{cof.}\,Z\,L.\,\mathit{cof.}\,Z\,M + \mathit{fin.}\,Z\,L\,\mathit{fin.}\,Z\,M\,\mathit{cof.}\,L\,Z\,M.$$

Or par les propriétés connues de la Parallaxe, il eſt à peu près:

$$L\,L' : M\,M' = d.\,Z\,L : d.\,Z\,M = \mathit{fin.}\,Z\,L : \mathit{fin.}\,Z\,M,$$

donc on aura

$$-\frac{d.\,Z\,L\,M}{\mathit{fin.}\,Z\,L\,M^2} = -\frac{L\,L'\,(1-\mathit{cof.}\,L\,M)}{\mathit{fin.}\,Z\,M\,\mathit{fin.}\,L\,Z\,M}, \text{ ou}$$

$$d.\,Z\,L\,M = L\,L'.\mathit{fin.}\,Z\,L\,M\,\frac{(1-\mathit{cof.}\,L\,M)}{\mathit{fin.}\,L\,M} = L\,L'.\mathit{tang.}\tfrac{1}{2}\,L\,M\,\mathit{fin.}\,Z\,L\,M;$$

parceque

$$\mathit{fin.}\,L\,M\,\mathit{fin.}\,Z\,L\,M = \mathit{fin.}\,Z\,M\,\mathit{fin.}\,L\,Z\,M \text{ et}$$
$$\frac{1-\mathit{cof.}\,L\,M}{\mathit{fin.}\,L\,M} = \mathit{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,L\,M:$$

Or tang. $\frac{1}{2}$ L M étant une quantité très petite on voit bien que la correction de l'angle Z L M eſt ſi petite, qu'on peut la négliger entierement. Si l'on vouloit même pouſſer l'exactitude plus loin on trouveroit:

$$d.\,Z\,M : d.\,Z\,L = \frac{\mathit{fin.}\,Z\,M}{1-\pi\ \mathit{coj.}\,Z\,M} : \frac{\mathit{fin.}\,Z\,L}{1-\pi\ \mathit{coj.}\,Z\,L};$$

π étant une quantite proportionelle à la Parallaxe, & ſubſtituant au lieu de $\frac{1}{1-\pi\ \mathit{coj.}\,Z\,M}$ cette expreſſion:

$$1 - \pi\,\mathit{cof.}\,Z\,L + \pi\,\mathit{cof.}\,Z\,M;$$

il en reſulte ce terme affecté de π:

$$-\pi.\,L\,L'\,\frac{(\mathit{cof.}\,Z\,M - \mathit{cof.}\,Z\,L)}{\mathit{fin.}\,L\,M}\,\mathit{fin.}\,Z\,L\,M$$
$$= -2\pi.\,L\,L'\,\frac{\mathit{fin.}\,\frac{1}{2}(Z\,L - Z\,M)}{\mathit{fin.}\,L\,M}\,\mathit{cof.}\,\tfrac{1}{2}(Z\,L + Z\,M)\,\mathit{fin.}\,Z\,L\,M,$$

d'où

d'où à cauſe de L M & Z L − Z M très petits, cette correction ſera:

$$-\pi.\,L\,L'\,\text{ſin.}\,Z\,L.\,\text{ſin.}\,Z\,L\,M\,\tfrac{(Z\,L\,-\,Z\,M)}{L\,M}$$
$$=-\pi.\,L\,L'\,\text{ſin.}\,Z\,L\,\text{ſin.}\,Z\,L\,M\,\text{cof.}\,Z\,L\,M,$$

parceque $\frac{Z\,L\,-\,Z\,M}{L\,M}=$ cof. Z L M à peu près. Par ce calcul nous ſommes donc parfaitement aſſurés, qu'il ne peut réſulter de la Parallaxe aucune correction ſenſible pour l'angle Z L M. Si au lieu de calculer l'effet de la Parallaxe on cherche celui de la refraction, on aura pour l'équation:

$$\frac{-\,d.\,Z\,L\,M}{\text{ſin.}\,Z\,L\,M^2}=\frac{-\,d.\,Z\,M.\,\text{ſin.}\,Z\,L}{\text{ſin.}\,Z\,M^2.\,\text{ſin.}\,L\,Z\,M}+\frac{d.\,Z\,L.\,\text{cof.}\,L\,M}{\text{ſin.}\,Z\,M\,\text{ſin.}\,L\,Z\,M};$$

$$d.\,Z\,M : d.\,Z\,L = \text{tang.}\,Z\,M : \text{tang.}\,Z\,L$$

à peu près, d'où il ſuit:

$$\frac{-\,d.\,Z\,L\,M}{\text{ſin.}\,Z\,L\,M^2}=\frac{-\,d.\,Z\,L.\,\text{cof.}\,Z\,L}{\text{cof.}\,Z\,M\,\text{ſin.}\,Z\,M\,\text{ſin.}\,L\,Z\,M}+\frac{d.\,Z\,L.\,\text{cof.}\,L\,M}{\text{ſin.}\,Z\,M.\,\text{ſin.}\,L\,Z\,M};$$

donc

$$-d.\,Z\,L\,M = d.\,Z\,L\,\frac{\text{ſin.}\,Z\,L\,M}{\text{ſin.}\,L\,M}\left(\text{cof.}\,L\,M-\frac{\text{cof.}\,Z\,L}{\text{cof.}\,Z\,M}\right)$$
$$=-d.\,Z\,L.\,\text{tang.}\,Z\,M.\,\text{ſin.}\,Z\,L\,M.\,\text{cof.}\,Z\,M\,L;$$

parceque

$$\text{cof.}\,L\,M\,\text{cof.}\,Z\,M-\text{cof.}\,Z\,L=\text{ſin.}\,L\,M\,\text{ſin.}\,Z\,M\,\text{cof.}\,Z\,M\,L;$$

& à cauſe de

$$\text{cof.}\,Z\,M\,L=-\,\text{cof.}\,Z\,L\,M$$

à peu près, il ſera:

$$-d.\,Z\,L\,M = d.\,Z\,L.\,\text{tang.}\,Z\,M\,\text{ſin.}\,Z\,L\,M\,\text{cof.}\,Z\,L\,M,$$

dans la quelle formule on peut auſſi employer tang. Z L au lieu de tang. Z M.

§. 8. Lorsque on a observée la Lune hors du Méridien, il faut encore faire attention à une circumstance dont plusieurs Astronomes ont traité, c'est que cet Astre à cause des petits changements de la Parallaxe, de la refraction & de la déclinaison ne paroît pas décrire par son mouvement apparent un petit cercle parallele, mais que la route apparente du centre de la Lune en a une petite déviation; par cette raison en observant la Lune hors du Méridien, il faut placer l'un des filets de Micromètre tellement, qu'il soit coincident avec la route apparente du centre de la Lune, & ce fil n'étant pas alors perpendiculaire à l'arc P L, il faut déterminer l'angle qu'il fait avec cet arc, moyennant quoi on trouvera aussi l'angle que l'arc L M fait avec ce filet. J'ai donné dans le Tome XIX. *des nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, des formules pour déterminer l'angle, que le fil en question fait avec l'arc P L; or comme il ne s'agit ici que d'avoir la valeur de l'angle M L P déterminée à peu près, on voit bien que ni cette dernière correction, ni celle dont j'ai traité dans l'Article précedent, ne pourront faire des variations sensibles dans l'angle P L S.

§. 9. Si l'on vouloit pousser la rigueur encore plus loin, il ne seroit pas même permis de supposer que la partie visible de la Lune fasse un Hemisphère entier, car la distance du spectateur n'etant pas infinie à l'égard du Diamètre de la Lune; on voit bien que la partie visible de la Lune sera un peu variable selon différentes positions des spectateurs sur la surface de notre Globe. Ayant égard à toutes ces circonstances, il est clair que le Problème par lequel on cherche la valeur précise de l'angle

l'angle P L S, eſt extrêmement compliqué; mais comme les corrections qui réſultent de toutes ces conſidérations ajoutées enſemble, ſont aſſez petites, il ſuffit pour la Pratique de connoitre en gros, ſi l'angle P L S eſt obtus ou aigu. D'ailleurs on peut remarquer ici, que ſi l'on ſuppoſe tiré par le centre de la Lune un plan perpendiculire à la droite qui joint le lieu du Spectateur avec le centre de la Lune; ce plan fera avec le plan qui eſt perpendiculaire à la droite qui paſſe par les centres de la Lune & de la terre, un angle préciſement égal à celui ſous lequel le lieu du Spectateur paroitroit au centre de la Lune éloigné du centre de la terre. Donc ſi l'on nomme la diſtance entre les centres de la terre & de la Lune a, le demi-diamètre de la terre pour le lieu du ſpectateur r, l'angle que forme ce demi-diamètre de la terre avec la ligne droite qui joint les centres θ, & joignant le lieu du Spectateur avec le centre de la Lune par une droite nommée c, que l'angle entre a & c ſoit nommé ζ, on aura

$$\text{tang. } \zeta = \frac{r \text{ ſin. } \theta}{a - r \text{ coſ. } \theta} \quad \text{et} \quad cc = aa - 2ar \text{ coſ. } \theta + rr.$$

En ſuite on trouvera la zone de la ſurface de la Lune viſible au Spectateur, par le moyen de la droite c & du demi-diamètre de la Lune D, car cette zone ſera à l'Hemiſphère de la Lune comme $V(1 - \frac{D}{c}) : 1$. Ou à cauſe de D très petite par rapport à c, comme $1 - \frac{D}{2c} : 1$.

§. 10. Pour montrer l'application des Règles données ci-deſſus, nous propoſerons quelques Exemples tirés de la Collection des obſervations faites par Mr. *Darquier* à Toulouſe. Le 13 Avril 1774 Mr. *Darquier* a obſervé la hauteur du bord inferieur de la Lune, la déclinaiſon de

la Lune étant alors 14°. 4′, B. celle du Soleil 9°. 10′. B & l'arc L S à peu près = 30°. Or à cauſe de

$$\text{Log. cof. } d = 9,2022\text{ ; L. cof. } \delta = 9,3857\text{;}$$

il eſt Log. $\frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta} = 9,8165$ & comme Log. cof. $b = 9,9375$, on a cof. $b > \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$; d'où par notre Règle il a falu obſerver le bord inferieur. Le 3 de Juin 1775 la déclinaiſon de la Lune étant 15°. 54′. B, celle du Soleil 22°. 19′. B & l'arc S L = 59°, Mr. *Darquier* a obſervé le bord ſuperieur, ce qui s'accorde auſſi avec la Règle préſcrite, puiſqu'il eſt évidemment cof. $b < \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$, la fraction étant plus grande que l'unité. Le 1 de Septembre 1775 la déclinaiſon de la Lune étant 13°. 22′. A, celle du Soleil 8°. 17′. B & l'arc L S = 73°, le bord ſuperieur fut obſervé, ce qui s'accorde avec la Règle. Le 22 d'Avril 1774, par une déclinaiſon de la Lune de 4°. 55′. B, celle du Soleil étant 12°. 18′. B, & l'arc L S = 134°, le bord ſuperieur fut obſervé, comme il faloit d'après notre Règle. Le 9 d'Aout 1775 la Déclinaiſon de la Lune étant 18°. 16′. A, celle du Soleil 15°. 22′. B, l'arc L S étant 161°, le bord inferieur fut obſervé, ce qui s'enſuit auſſi de notre Règle, puiſque

$$\text{Log. } \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta} = 9,9407 \text{ \& L. cof. } b = 9,9757\text{,}$$

d'où cof. $b > \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$. Cependant comme la différence n'eſt pas fort ſenſible, il étoit peut-être indifférent lequel des deux bords on obſervât. Le 11 d'Aout par la déclinaiſon de la Lune 12°. 5′. A, celle du Soleil étant 15°. 17′. B & l'arc L S = 191°, le bord ſuperieur a été obſervé, comme il faloit parceque cof. $b < \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$. De même le 6 de Mai 1774,

la

la déclinaiſon de la Lune étant 2°. 28′. B, celle du Soleil 16°. 37′. B, l'arc L S = 325°, il a falu obſerver le bord ſuperieur parceque cof. $b < \frac{cof. d}{cof. \delta}$. Le 19 de Septemb. 1775, la déclinaiſon du Soleil étant 1°. 28′. B, celle de la Lune 16°. 55′. B, l'arc L S = 131°.; il a falu obſerver le bord inferieur, puisque cof. $b > \frac{cof. d}{cof. \delta}$.

§. 11. Ces exemples ſont tous choiſis pour des cas, dans leſquels la Déclinaiſon du Soleil étoit Boréale, citons en auſſi quelques uns pour la Déclinaiſon du Soleil Auſtrale. Le 25 de Fevrier 1776, la déclinaiſon de la Lune étant 15°. 20′. B, celle du Soleil 9°. 7′. A & l'arc L S = 84°, Mr. *Darquier* a obſervé le bord inferieur comme il faloit ſelon notre Règle. Le 29 de Novembre 1775, la Déclinaiſon de la Lune étant 11°. 11′, A, celle du Soleil 21°. 31′, A, l'arc L S = 87° le bord inferieur fut obſervé puisque cof. $b > \frac{cof. d}{cof. \delta}$. Le 29 d'Octobre 1775 la Déclinaiſon de la Lune étant 19°. 44′. A, celle du Soleil 13°. 33′. A, l'arc L S = 64°, le bord ſuperieur fut obſervé puisque cof. $b > \frac{cof. d}{cof. \delta}$, car

$$\log. \frac{cof. d}{cof. \delta} = 9,8413 \text{ \& } \log. \text{ cof. } b = 9,6418.$$

De même pour le 11 d'Octobre 1771, la déclinaiſon de la Lune étant 18°. 27′. A, celle du Soleil 10°. 53′. A & l'arc L S = 43°, on trouve $\log. \frac{cof. d}{cof. \delta} = 9,7757$, log. cof. $b = 9,8641$, donc cof. $b > \frac{cof. d}{cof. \delta}$, par conſequent il a falu obſerver le bord ſuperieur. Le 5 de Novemb. 1775, la déclinaiſon de la Lune étant 4°. 51′. B, celle du Soleil 15°. 44′. A, l'arc L S = 160°, il eſt cof. $b > \frac{cof. d}{cof. \delta}$, donc il a falu obſerver le bord inferieur. Le 30 de Novembre

1779, la déclinaiſon de la Lune étant 6°. 44′. A, celle du Soleil 21°. 41′. A, l'arc L S = 101°, le bord ſuperieur a été obſervé, comme il faloit par notre Règle.

§. 12. Quoique tous ces Exemples allegués s'accordent bien avec les Règles préſcrites, il faut pourtant avouer, que parmi les obſervations de Mr. *Darquier* il y en a quelques unes, qui en different. Ainſi le 16 d'Avril 1774, la déclinaiſon de la Lune étant 18°. 20′. B, celle du Soleil 10°. 14′. B & l'arc L S = 64°, on a

$$\log. \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta} = 9,7521 \text{ \& } \log. \text{ cof. } b = 9,6418,$$

donc cof. $b < \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$, il auroit donc falu obſerver le bord ſuperieur & non l'inferieur comme Mr. *Darquier* l'a fait. Pour le 28 d'Octobre 1775, la déclinaiſon de la Lune étant 19°. 44′. A, celle du Soleil 13°. 10′. A; l'arc L S = 52°, il eſt $\log. \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta} = 9,8398$ & $\log. \text{ cof. } b = 9,7893$, donc cof. $b < \frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$, mais malgré cela le bord ſuperieur a été obſervé. Or dans ce dernier cas, comme cof. b ne differoit que fort peu de $\frac{\text{cof. } d}{\text{cof. } \delta}$, il étoit peut-être indifferent lequel des deux bords on obſervât, mais pour le cas precédent la différence étant plus ſenſible, je ne vois aucun moyen d'expliquer ce Paradoxe ſingulier.

BREVIARIVM OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM,

PRO

DETERMINANDO SITV GEOGRAPHICO CELEBRIS VRBIS ATQVE PORTVS CHERSONI,

ANNO 1782 INSTITVTARVM.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Ex aduentu meo in hanc nouam vrbem, prima mihi cura fuit inquirere in ſtatum Quadrantis mei, a quo exacta latitudinis determinatio dependet: facile enim e longo itinere per aſperum et hiulcum terrae ſolum mutationem filorum micrometricorum fieri poſſe ſuſpicabar. Ex verificatione ad horizontem ter inſtituta reperi errorem ſubtractiuum $5'.\ 17''$; $5'.\ 24\frac{1}{2}''$ et $5'.\ 22''$. Quum vero diſtantia baculi cum factis in ipſo metis, centro tubi immobilis in vtroque Quadrantis ſitu recto et inuerſo reſpondentibus, erat admodum modica, et vix 70 orgyas

gyas ſuperabat; hinc conſtitui examinare quadrantem per altitudines ſtellarum fixarum meridianas, in hemiſphaerio Auſtrali et boreali ſedulo obſeruatas, e quarum combinatione tam correctionem inſtrumenti, quam latitudinem obſeruatorii mei hunc in modum determinaui. Sit altitudo ſtellae obſeruata et a refractione repurgata ad auſtrum $= a$, et ad boream ſupra polum $= \alpha$; declinatio prioris, adhibitis praeceſſione, aberratione et nutatione, in apparentem conuerſa, et quidem borealis $= d$; poſterioris $= \delta$; erit error Quadrantis

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta) + \tfrac{1}{2}(a - d) - 90^\circ$$

et latitudo quaeſita

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta) - \tfrac{1}{2}(a - d).$$

Quodſi ſtella ad boream infra polum culminaret, haberetur correctio inſtrumenti

$$= \tfrac{1}{2}(a - d) - \tfrac{1}{2}(\delta - \alpha);$$

et latitudo

$$= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(a - d) + \tfrac{1}{2}(\delta - \alpha).$$

E magno numero harum repetitarum obſeruationum triginta ſelectiores retineo, easque in ſequenti laterculo ob oculos pono.

Dies obſ. St. Nou	Nomina fixarum.	alt. obſeru.	refract. d. 1 Caill.	Declin. appar. ad diem obſeru.	
14 Sept.	δ Dracon.	69°. 27′. 10″	0′. 25″	67°. 17′. 14′	
	γ Lyrae	75. 52. 8	17	32. 24. 42	
	β Cygni	70. 58. 30	23	27. 31. 20	
17	δ Drac.	69. 27. 25	25	67. 17. 15	
	β Cygni	70. 58. 28	23	27. 31. 20	
	α ſagittae	60. 59. 36	37	17. 32. 4	
15 Oct.	α Cephei	75. 3. 36	18	61. 40. 39	
	β - -	67. 7. 30	28	69. 36. 58	
	β Cygni	70. 58. 40	23	27. 31. 21	
	α ſagittae	60. 59. 42	37	17. 32. 4	
	γ Aquilae	53. 34. 4	49	10. 6. 10	
	α - -	51. 46. 20	52	8. 18. 41	
	β - -	49. 21. 10	58	5. 53. 17	
24	ε Cygni	76. 37. 40	16	33. 10. 14	
	α Cephei	75. 3. 35	18	61. 40. 40	
	α Aquilae	51. 46. 24	52	8. 18. 41	
	β - -	49. 21. 14	0. 58	5. 53. 17	
	ϑ Antinoi	42. 1. 29	1. 14	1. 26. 51	A.
	ε Delph.	54. 3. 3	0. 48	10. 35. 2	
	α - -	58. 37. 25	41	15. 9. 49	
	ε Cygni	76. 37. 35	16	33. 10. 14	
19 Nou.	α Cephei	75. 3. 38	18	61. 40. 40,5	
	β - -	67. 7. 26	28	69. 37. 1,5	
21	ε Pegaſi	52. 21. 38	0. 52	8. 53. 33	
	α Aquarii	42. 6. 11	1. 14	1. 21. 51	}
	γ - -	41. 59. 51	1. 16	2. 28. 18,5	} A.
	η Pegaſi	70. 22. 18	0. 24	26. 54. 41,5	
	γ - -	57. 26. 30	43	13. 58. 44	
	δ Androm.	73. 7. 53	0. 20	29. 40. 25,5	

Atque ex his, peracto iuxta formulam calculo, sequentes pro correctione Quadrantis et Latitudine loci obtinui valores.

Dies	Stellae fixae ad Boream. et ad Austr.		Err. Quadr. subtractiu.	Latitudo.
14 Sept.	Ex δ Dracon.	γ Lyrae	5′. 34″	46°. 38′. 25″
		β Cygni	23	36
17		- - -	30	45
		α Sagittae	35	40
15 Oct.		β Cygni	26½	30½
		α Sagittae	29	28
	α Cephei	γ Aquilae	31	26
		α - -	22	35
		β - -	26	31
		ε Cygni	33½	23½
		β Cygni	28	32
		α sagittae	30½	29½
	β Cephei	γ Aquilae	32½	27½
		α - -	23½	36½
		β - -	27½	32½
		ε Cygni	35	25
24 Oct.		α Aquilae	24	33
		β - -	28½	28½
	α Cephei	ϑ Antin.	31½	25½
		ε Delph.	35	25
		α - -	26	31
		ε Cygni	5′. 31	46°. 38′. 26″

Dies

Dies	Stellae fixae ad Boream. et ad Auſtr.		Err. Quadr. ſubtractiu.	Latitudo.
19 et 21 Nouem.	α Cephei	ε Pegaſi	5′. 36,7	46°. 38′. 23″,7
		α Aquar.	24, 2	36, 2
		γ - -	27	33, 5
		η Pegaſi	36,7	23, 7
		β - -	36,4	24
		γ - -	31,7	28, 7
		δ Andr.	34	26, 5
	β Cephei	ε Pegaſi	36, 2	23, 2
		α Aquar.	23.7	35, 7
		γ - -	26, 4	33
		η Pegaſi	36, 2	23, 2
		β - -	36	23, 5
		γ - -	31, 2	28, 2
		δ Androm.	5. 33, 4	46. 38. 26

Quum omnes hae obſeruationes pari cura et ſolertia inſtitutae ſint, nullam reliquis praeferre aut poſtponere poſſum; medium igitur ex 36 combinationibus praebet correctionem Quadrantis — 5′. 30″, 3 et Latitudinem loci 46°. 38′. 29″, 4.

Progredior nunc ad altitudines Solis meridianas, quibus, vt ſpatio parcerem, correctio Quadrantis inuenta — 5′ 30″. iam applicata eſt; porro in computanda declinatione Solis differentia Meridianorum inter Pariſios et Cherſonum duarum horarum ſuppoſita.

Dies obſerv. St. Nov.	Altitudo limb. ☉ ſuperior.	Refr. — parallal.	½ Diam. ☉	Declin. ☉ Boreal.	Latitudo.
15 Sept	46°.34′. 8″	0′.57″	15′.58″	2°.56′. 1″	46°.38′.48″
16	46. 11. 2	58	- -	2. 32. 49	43
17	45. 48. 10	- -	- -	2. 9. 34 Auſtral.	20
28	41. 30. 58	1. 8,5	16. 1,5	2. 7. 48	24
30	40. 44. 15	1. 10,5	16. 2	2. 54. 35	22½
1 Oct.	40. 21. 0	1. 11	16. 2,5	3. 17. 56	17½
5	38. 48. 4	1. 16	16. 4	4. 50. 54	22
7	38. 2. 0	1. 18	- -	5. 37. 5	17
8	37. 39. 2	1. 19	- -	6. 0. 3	18
9	37. 16. 0	1. 20	16. 5	6. 22. 57	28
10	36. 53. 0	1. 21	- -	6. 45. 45	41
17	34. 16. 36	1. 31	16. 7	9. 22. 32	30
18	33. 54. 30	- -	- -	9. 44. 27	41
23	32. 7. 20	1. 39	16. 9	11. 31. 42	46
28	30. 44. 40	1. 44	16. 10	13. 14. 37	37
29	30. 4. 55	1. 46	- -	13. 34. 36	25
30	29. 45. 12	1. 47	- -	13. 54. 22	23
31	29. 25. 30	1. 48	16. 10,5	14. 13. 54	34½
4 Nov.	28. 10. 7	1. 54	16. 11,5	15. 29. 43	15½
21	23. 39. 1	2. 23	16. 15	20. 1. 4	33
4 Dec.	21. 21. 37	2. 36	16. 17	22. 18. 52	24
9	20. 47. 33	2. 41	16. 17,5	22. 52. 55	30½
24	20. 14. 20	2. 45	16. 18,5	23. 26. 9,5	34
25	20. 16. 0	- -	16. 19	23. 24. 37	27
30	20. 20. 38	2. 43	- -	23. 9. 52	32

Medium ex 25 obſervation. 46. 38. 29.

Hinc

Hinc abunde patet, Latitudinem Cherſoni tuto ſtatui poſſe 46°. 38½'.

De longitudine eiusdem vrbis.

Per totum meae Cherſoni commorationis tempus, praeter tres Emerſiones 1^mi Satellitis Iouis, et harum quidem prima et vltima dubiae ſunt, nullam occultationem ſtellae fixae a Luna obſeruare licuit.

$\frac{1}{14}$ Septembr. Emerſionem 1^mi ſatellitis obſeruare mihi viſus ſum 8^h. 57'. 4''. T. v. obſeruatio dubia; nam Iupiter denſis inhaerebat vaporibus ita vt ſatellites ante indicatum momentum difficulter viderentur.

$\frac{19}{30}$ Emerſio eiusdem ſatellitis 7^h. 21'. 40'', coelo ſereno et pacato, Ioue bene terminato et faſciis ſatis conſpicuis.

De hac obſeruatione non eſt quod dubitem. Eandem obſeruauit ſocius 7^h. 22'. 0''.

$\frac{13}{23}$ Octobr. Emerſionem eiusdem obſeruare mihi videbar 7^h. 42'. 43'', obſeruatio etiam dubia, facta enim prope horizontem, Iupiter male terminatus et ſubruber conſpiciebatur.

Obſeruatio media comparata cum momento ex ephemeridibus deſumto 5^h. 20'. 21'' praebet differentiam meridianorum Pariſini et Cherſonenſis 2^h. 1'. 19''.

Praeſtiti quod potui, non tamen quantum voluiſſem.

Declinationem acus magneticae reperi

$\frac{7}{14}$ Septembr $10\frac{1}{2}^{\circ}$ occidentem versus

$\frac{21}{2}$ *Sept.* / *Octobr.* 10 " " "

$\frac{5}{15}$ Octobr. 10 " " "

$\frac{21}{1}$ *Dec.* / *Ian.* 1783. 10°. 6′.

Inclinationem acus inueni 65°. Verum hanc obſervationem pro exacta et abſoluta non vendito.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE,

PRO STABILIENDA POSITIONE VRBIS CHARCOW ANNO 1783 INSTITVTAE.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Latitudinem obſeruaturus ſedulo inquiſiui in ſtatum Quadrantis mei per altitudines ſtellarum fixarum meridianas, verſus Auſtrum et Boream diuerſis diebus captas, ex quarum combinatione, iuxta formulam obſeruationibus Cherſonenſibus appoſitam tam errorem inſtrumenti quam eleuationem Poli determinaui, vt ſequitur:

		Error.	Latit.
Die $\frac{25}{6}$ Apr. Mai.	Ex α Drac. ad Bor. et β Leon.	$-5'.13''$;	$49°.59'.15''$
- - - -	β Virgin.	$-5.\ 7$;	21
- - - -	δ - - -	$-5.\ 4\frac{1}{2}$;	$23\frac{1}{2}$
- - - -	ε - - -	-5.10;	18
	med.	$-5.\ 8\frac{1}{2}$;	49. 59. 19

D. $\frac{11}{22}$ Maii ad Boream.

Nom. fix	Polaris.		α Draconis.		β Vrſae min.		γ Vrſae min.	
ad Auſtr	Q.	Latitud.	Q.	Latitud.	Q.	Latitud.	Q.	Latitud.
ζ Virgin.	6″	49°.59′.18″	8″	49°.59′.20″	14″	49. 59. 26	1½	49. 59. 13½
Arctur.	7	17	9	19	15	25	2½	12½
ζ Bootis.	2	22	4	24	10	30	57½	17½
ε - -	5	19	7	21	13	27	0½	14½
δ - -	9	15	11	17	17	23	4½	10½
Medium	6	49. 59. 18	8	49. 59. 20	14	49. 59. 26	1½	49. 59. 13½

In hac Tabula, columma littera Q inſignita praebet numerum ſecundorum, qui cum $-5'$ errorem Quadrantis conſtituunt, illo excepto caſu vbi legitur $57''\frac{1}{2}$, quippe quum ibi intelligendum ſit $-4'.57\frac{1}{2}''$.

D. $\frac{12}{24}$ Mai. Ex Arcturo et Polari. Error. Q. $-5'.3\frac{1}{2}''$ et Lat. $49°.59'.10\frac{1}{2}''$
Ex eodem et α Dracon. - - 5. $8\frac{1}{2}$ 15

med. $-5.6.$ 49. 59. 13.

Die $\frac{19}{31}$ Maii Ad Boream.

Nom. fixar.	α Dracon.		β Vrſae min.		γ Vrſae min.	
Ad Auſtr.	Err. Q.	Latitud.	Err. Q.	Latitud.	Err Q.	Latitud.
ζ Virg.	$-5'.3''$	49°.59′.26	$-5.11\frac{1}{2}$	49. 59. $34\frac{1}{2}$	-4.58	49. 59. $21\frac{1}{2}$
Arctur.	-5.12	$16\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{2}$	25	-5.8	12
ζ Boot.	$-5.9\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{2}$	18	28	-5.5	15
ε Boot.	-5.8	21	$16\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{2}$	$-5.3\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$
med.	-5.8	49. 59. 21	-5.17	49. 59. 29	-5.4	49. 59. 16

Med. ex omnibus dat pro errore $-5'.8''$. et pro latitud. $49°.59'.20''$.

Diſpi-

Diſpiciamus nunc ipſas obſeruationes ſtellarum fixarum, et quaenam ex illis Latitudo loci ſtatuenda ſit.

Dies obſeruat.	Nomina fixarum.	Alt. obſeru.	Error. Quadr.	refract. D. de la Caille	Decl. appar. ad diem obſeru.	Latitudo.
26 Mart.	α Caſtor.	72°.27′. 3″	−5′. 8″	0′. 21	32°.20′.50″	49°.59′.15″
	Procyon	45. 53. 20		1. 4	5. 46. 34	26
	β Polluc.	68. 38. 35		0. 26	28. 32. 14	13
10 Apr.	Regulus	53. 7. 55		50	13. 1. 5½	8½
	ζ Leonis	64. 35. 52		32	24. 29. 28	16
	δ - -	61. 49. 7		35	21. 42. 37	13
6 Maii	β Leonis	55. 53. 44		0. 45	15. 47. 0½	9½
	β Virgin.	43. 6. 8		1. 11	2. 59. 11½	22½
	γ Corui	23. 47. 37		2. 28	16. 20. 28½	30½
	δ Virgin.	44. 41. 38		1. 7	4. 34. 50	27
	ε - -	52. 34. 22		0. 51	12. 7. 38½	15½
	α - -	30. 5. 53		1. 54	10. 1. 37	32
	α Drac.	74. 39. 50		0. 18	65. 24. 56	20
22 Maii	ζ Virgin.	40. 38. 0		1. 17	0. 30. 55	20
	Arctur.	60. 25. 19		0. 37½	20. 18. 51½	18
	ζ Bootis	54. 46. 24		47	14. 39. 57	28
	ε - -	68. 5. 56		27	27. 59. 43½	22½
	δ - -	74. 14. 8		19	34. 7. 54½	13½
	Polaris	48. 14. 9		59½	88. 8. 46	15½
	α Dracon.	74. 39. 45		18	65. 25. 0½	19½
	β Vrſ. min.	65. 2. 30		31	75. 2. 40½	31½
	γ - -	67. 28. 25		27	72. 36. 17	49. 59 7

Dies obseruat.	Nomina fixarum.	Alt. obseru.	Error. Quadr.	refract. D. de la Caille.	Decl. appar. ad diem obseru.	Latitudo.
24 Maii	Polaris	48. 14. 0		0′. 59″½	88. 8. 46½	6¼
	α Drac.	74. 39. 40		18	65. 25. 1	15
	Arctur.	60. 25. 22		37½	20. 18. 51¼	15
30 Maii	ζ Virgin.	40. 37. 50		1. 17	0. 30. 56	31
	Arctur.	60. 25. 25		0. 37½	20. 18. 52	12½
	ζ Bootis	54. 46. 35		47	14. 39. 58	18
	ε - -	68. 5. 58		27	27. 59. 44	21
	α Drac.	74. 39. 45		18	65. 25. 2	21
	βVrſ.min.	65. 2. 35		31	75. 2. 41	37
	γ - -	67. 28. 30	−5. 8.	27	82. 36. 17	12
				Medium ex omnibus		49. 59. 19.

Altitudines Solis meridianae pro eadem Latitudine ſequentes ſuppeditant determinationes; vbi notandam venit limbum Solis ſuperiorem ſeu borealem obſeruatum, et in computo declinationis Solis differentiam meridianorum Pariſini et Charkowienſis aſſumtam eſſe 2¼ horarum.

Dies obseruat. St. nov.	Alt. obseru.	Corr. Quadr.	refract. —parall.	Semid. ⊙lis.	Declin. ⊙lis Boreal.	Eleu. Poli.
24 Mart.	41°.50′. 2″	−5′. 8″	1′. 8″	16′. 4″	1°.27′.14″	49°.59′.32″
25	42. 13. 40		1. 7	- -	1. 50. 48,5	27½
26	42. 37. 10		1. 6	- -	2. 14. 20	28
29	43. 47. 30		1. 4	16. 3	3. 24. 38	23
2 Apr.	45. 20. 10		1. 1	16. 2	4. 57. 24	25
17	50. 52. 20		0. 48,5	15. 57,5	10. 29. 52	26
21	52. 15. 16		47	56,5	11. 52. 45	20½
6 Maii	56. 55. 15		40	53	16. 33. 5	31
7	57. 12. 15		39	- -	16. 49. 46	11
9	57. 44. 35		37,5	52,5	17. 22. 18,5	21
15	59. 14. 52		36	51	18. 52 52	35
16	59. 28 50		35	- -	19. 6. 52,5	36½
21	60. 34. 7		34	50	20. 11. 59	24
22	60. 46. 2		33	- -	20. 24. 0,5	29½
23	60. 57. 41		- - -	- -	20. 35. 40	30
24	61. 9. 3		- - -	49,5	20. 46. 58,5	26
26	61. 30. 45		32	- -	21. 8. 31	15½
30	62. 9. 23	−5. 8	0. 31	15. 49	21. 47. 12	17
				Medium —	—	49. 59. 25.

Hinc igitur liquet latitudinem vrbis Charkow tuto statui posse 49°. 59′ 22″, vel rotunde 49°. 59½.

Obſeruationes pro Longitudine eiusdem Vrbis.

Die $\frac{27}{7}$ Mart. $\frac{}{\text{Apr.}}$. Inter nubium hiatus vidi prope Lunam duas ſtellas fixas, quarum proxima, 136 in conſtellatione Tauri, occultari mihi viſa $10^{h}. 22'. 2''$. T. v. obſeruatio haec ob nubeculas praeterfugientes dubia, et motus horologii non ſatis exploratus erat.

Die $\frac{19}{20}$. Immerſio 1^{mi} ſatellitis $14^{h}. 18'. 19''$. T. v. Coelo ſereno et pacato; ſed Ioue parum eleuato faſciae non diſtincte apparebant: figura tamen Iouis bene terminata, et ſatellites clare micabant: obſeruatio haec ſatis bona mihi videbatur.

Die $\frac{12}{23}$ Maii. Immerſio 1^{mi} ſatellitis

Lumen ſatellitis valde imminutum $14^{h}. 27'. 6''$

Immergi videtur — — 20

Immerſio certa 14. 27. 32

Aere ſereno et quieto, faſciae Iouis bene diſcernebantur; altitudo planetae erat $16°. 23'$. Obſeruatio bona.

Die $\frac{15}{24}$. Emerſio 3^{ii} ſatellitis - - $15^{h}. 48'. 35''$

Coelo ſereno; ſed ſub diluculo admodum intenſo Satellites cum difficultate videbantur, et Emerſio conſecuta prope 1^{mum} Satellitem, obſeruatio dubia.

Die $\frac{16}{25}$. Emerſio 4^{ti} inter nubeculas in regione Iouis vagantes obſeruata $13^{h}. 57'. 52''$; obſeruatio etiam dubia.

Quod

Quod attinet ad tempora obſeruationum ſatellitum Iouis vera, ea eruta ſunt ex altitudinibus ſolis correſpondentibus.

Immerſiones primi Satellitis contuli cum momentis Ephemeridum Pariſinarum, prior ibi notata $12^h. 3'. 36''$. dat differentiam meridianorum $2^h. 14'. 43''$; altera vero $12^h. 12'. 47''$, praebet $2^h. 14'. 45''$. Concluſiones praeter expectationem mirum in modum inter ſe conſentiunt. His adiungi poteſt:

Obſervatio Eclipſis Lunae totalis cum mora, die $\frac{7}{18}$ Martii 1783 in vrbe Charkow tubo Dollondiano 3^{tum} pedum inſtituta.

	Temp. vero.
Penumbra in diſco Lunae apparet - -	$9^h. 51'.$
Initium Eclypſeos certum - - -	9. 57. 0''.
Grimaldus immergitur - - - -	59. 20.
Vmbra ad Galilaeum - - - -	10. 1. 33.
Galilaeus totus tegitur - - -	2. 45.
Ariſtarchus immergi incipit - - -	7. 59.
—— —— totus obumbratur - - -	10. 34.
Bullialdus - - - - -	15. 59.
Copernicus incipit occultari - -	17. 13.
—— —— totus in vmbra - - -	19. 35.
Tycho vmbram ingreditur - - -	23. 34.
—— —— totus immergitur - - -	25. 39.
Plato ad vmbram - - - -	28. 53.
—— —— totus abſconditur - - -	30. 12.
Manilius - - - - -	37. 18.
Menelaus - - - -	40. 33.

	Temp. vero.
Proclus (dub.)	$10^{h}. 48^{l}. 23^{ll}.$
Mare Criſium incipit	51. 7.
—— —— totum	54. 22.
Immerſio Lunae totalis in vmbram	57. 17.

Vmbra in Eclypſi totali erat valde diluta, ita vt corpus Lunae nudo oculo videretur; per tubum vero pleraeque maculae ac in nouilunio conſpiciebantur. Color vmbrae cinereus et ſubruber. Durante eclypſi obſeruaui emerſionem ſtellae $12^{h}. 20^{l}. 43^{ll}.$

Emerſiones macularum.

	Temp. vero.
Luna egreditur ex vmbra	$12^{h}. 39^{l}. 26^{ll}.$
Grimaldus	42. 8.
Galilaeus totus	46. 38.
Ariſtarchus	50. 57.
—— —— totus	52. 23.
Copernicus	12. 56. 19.
Tycho (dub.)	13. 1. 51.
Plato	13. 8. 22.
—— —— totus	9. 52.
Manilius	18. 12.
Menelaus	21. 2.
Plinius	25. 17.
Mare Caſpium	36. 21.
—— —— totum	38. 11.
Finis Eclypſeos	13. 39. 51.
Penumbra diſparet	13. 45. 0.

Sum-

Summa huius obſeruationis.

	Temp. vero.
Initium - - - -	$9^h. 57'. 0''.$
Finis - - - -	13. 39. 51.
Immerſio - - - -	10. 57. 17.
Emerſio - - - -	12. 39. 26.
Duratio Eclypſis totalis - - -	3. 42. 51.
—— —— Morae - - -	1. 42. 9.
Medium Eclypſeos ex initio et fine -	11. 48. $25\frac{1}{2}$.
Idem ex immerſione et emerſione -	11. 48. $21\frac{1}{2}$.

Declinatio acus magneticae obſeruata a ſeptentrione ad occaſum.

Die $\frac{9}{10}$	Martii	7°, 4.
$\frac{13}{14}$	——	7, 7.
$\frac{28}{9}$	Aprił Maii	7, 2.
$\frac{4}{15}$	Maii	7, 5.
$\frac{5}{16}$	Maii	7, 6.
$\frac{12}{23}$	Maii	7, 3.
$\frac{16}{27}$	Maii	7, 5.
		7, 45 vel 7°. 27'.

Com-

Comparatio obſeruationis pro Eclipſi Lunae die $\frac{7}{18}$ Martii 1783, in vrbe Charkow a Cl. *Inochodſof* inſtituta, cum illa Petropoli a D. *Lexell* facta.

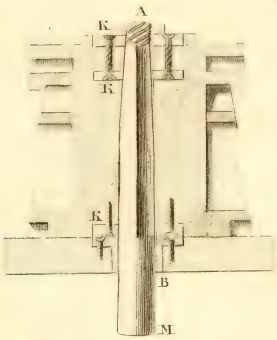
Initium Eclipſis in	Charkow	9^h.	$57'$.	$0''$.
	Petropoli	9.	33.	29.
Differ. Meridianor.			23.	31.
Immerſio Grimaldi in	Charkow	9.	59.	20.
	Petropoli	9.	36.	35.
			22.	45.
Vmbra ad Galil.	Charkow	10.	1.	33.
	Petropoli	9.	37.	53.
			23.	40.
Galileus immergit	Charkow	10.	2.	45.
	Petropoli	9.	39.	15.
			23.	30.
Copernicus immergit	Charkow	10.	19.	35.
	Petropoli	9.	55.	5.
			24.	30.
Vmbra ad Tychonem	Charkow	10.	23.	34.
	Petropoli	9.	59.	57.
			23.	37.
Tycho totus immergit	Charkow	10.	25.	39.
	Petropoli	10.	1.	28.
			24.	11.

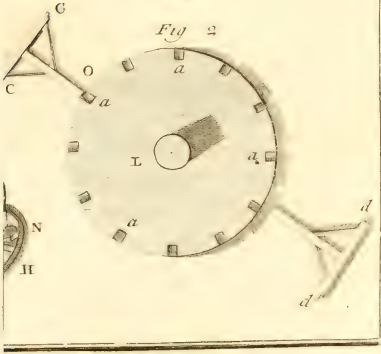
Vmbra

Vmbra ad Platon.	Charkow	10.	28.	53.
	Petropoli	10.	6.	18.
			22.	35.
Plato totus immergit	Charkow	10^{h}.	$30'$.	$12''$.
	Petropoli	10.	7.	10.
			23.	2.
Plinius immergit	Charkow	10.	40.	33.
	Petropoli	10.	18.	3.
			22.	30.
Eclipſis totalis	Charkow	10.	57.	17.
	Petropoli	10.	33.	36.
			23.	41.
Initium emerſ.	Charkow	12.	39.	26.
	Petropoli	12.	15.	4.
			24.	22.
Grimaldus emergit	Charkow	12.	42.	8.
	Petropoli	12.	18.	29.
			23.	39.
Galileus emergit	Charkow	21.	46.	38.
	Petropoli	12.	21.	33.
			25.	5.
Ariſtarchus emergere incipit	Charkow	12.	50.	57.
	Petropoli	12.	27.	20.
			23.	37.

Medium ex his concluſionibus ſumendo erit differentia Meridianorum inter Charkow et Petropolim 23′. 36″, tum vero ſi tantum ratio habeatur principalium momentorum, nimirum Initii Eclipſis, totalis Immerſionis et initii Emerſionis erit Differentia Meridianorum 23′. 51″. Quodſi igitur haec differentia ſtatuatur 23′. 40″, erit Longitudo pro Charkow a meridiano Pariſino computata 2ʰ. 15′. 37″.

Fig. 3





Mém. de l'Acad. Imp. des Sciences Tom. V. P. I.

Fig. 1

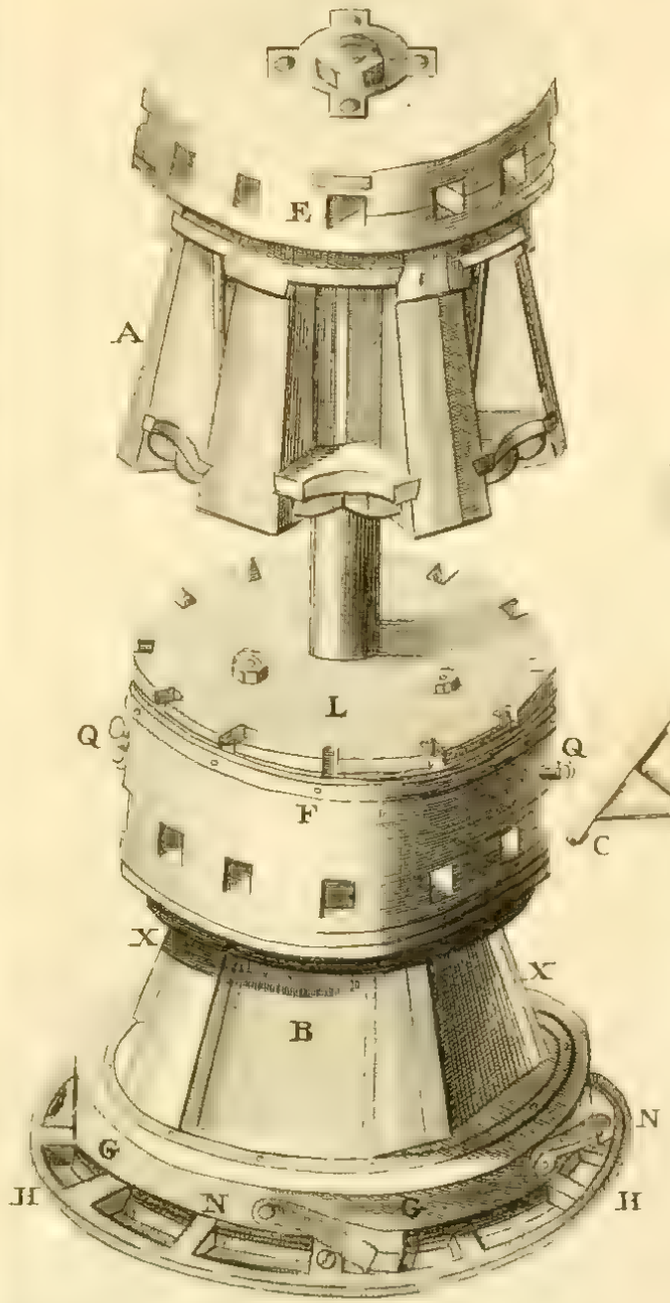


Fig. 3

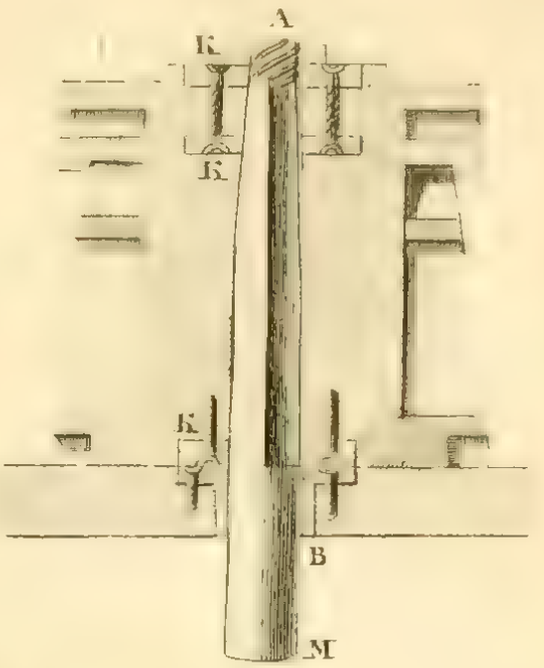


Fig. 2

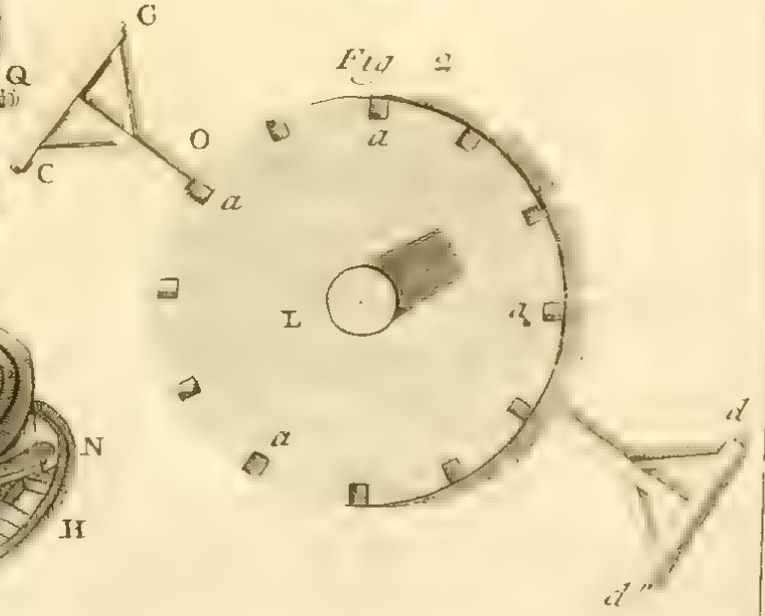


Fig 2

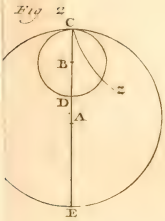


Fig 3

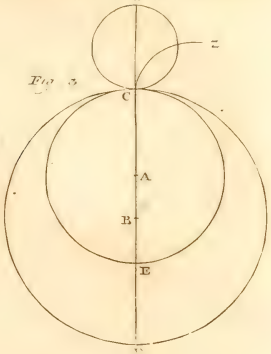


Fig 7

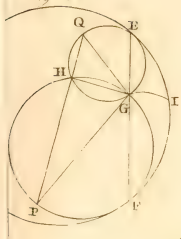
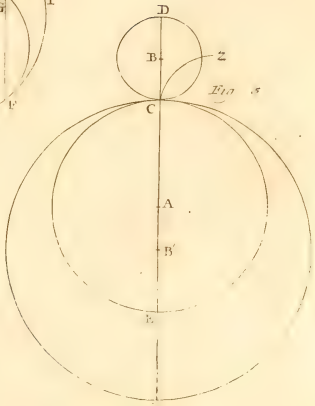


Fig 8



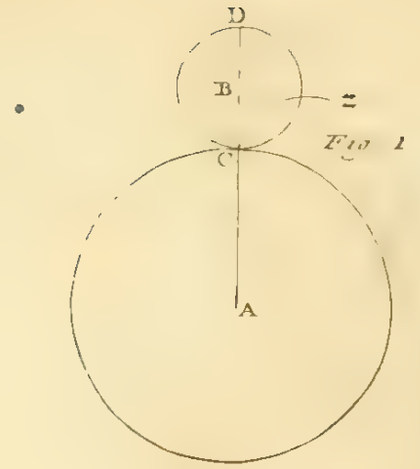


Fig 1

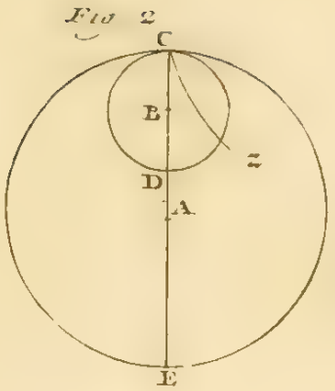


Fig 2

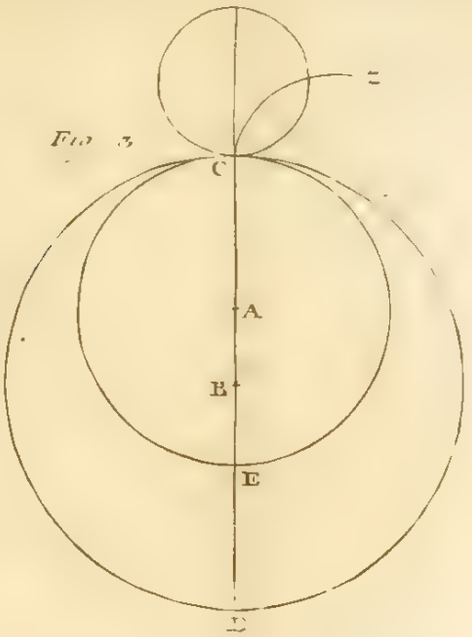


Fig 3

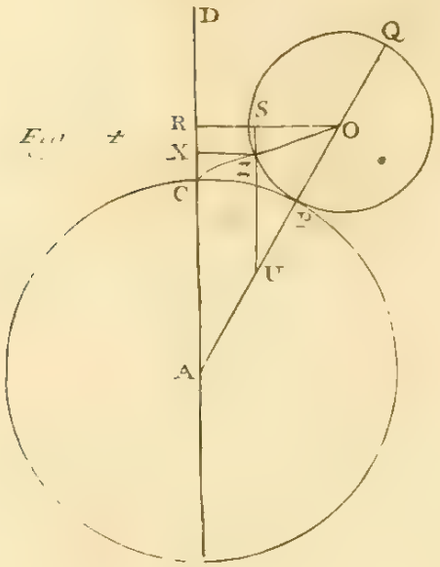


Fig 4

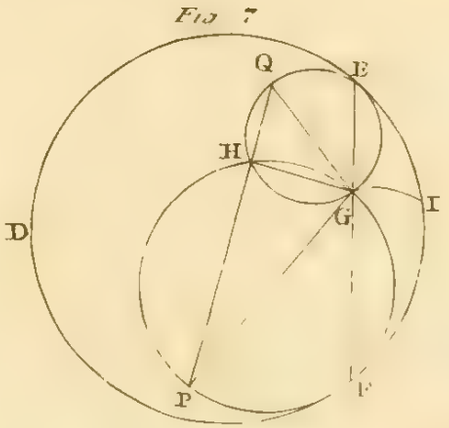


Fig 7

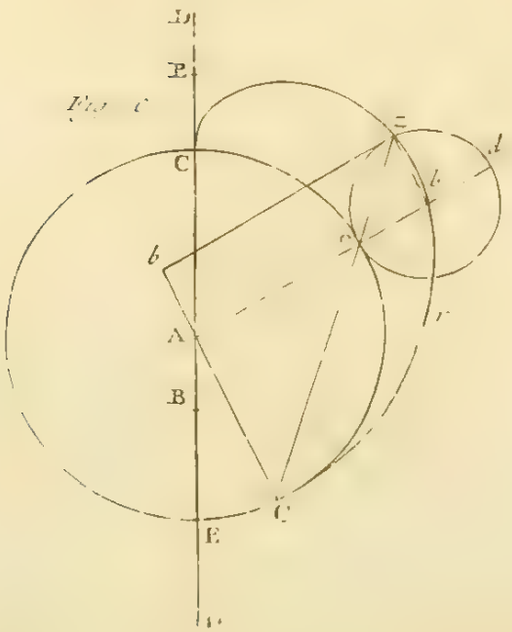


Fig 6

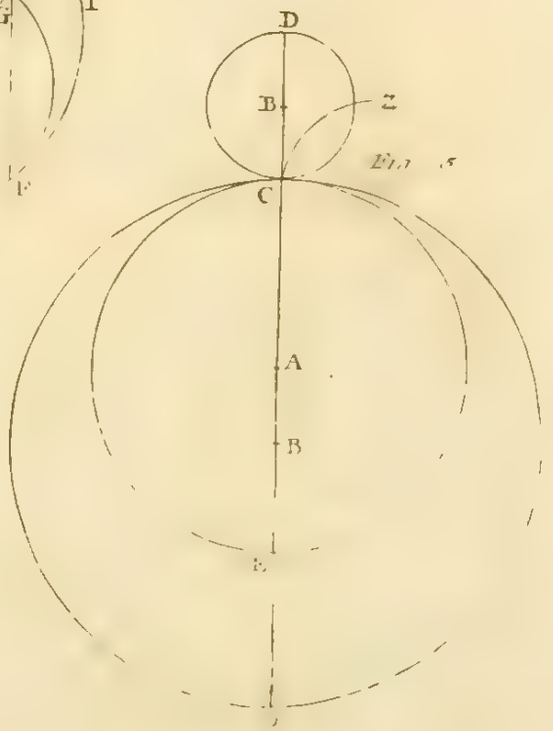


Fig 5

Fig. 2

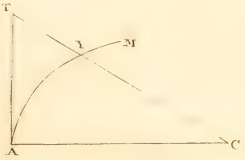


Fig. 4

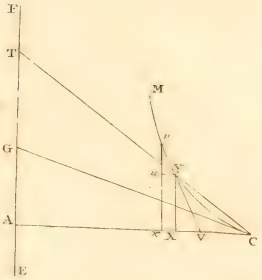


Fig. 5

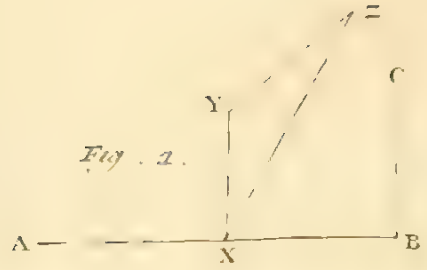


Fig. 1.
Z
C
Y
A
X
B

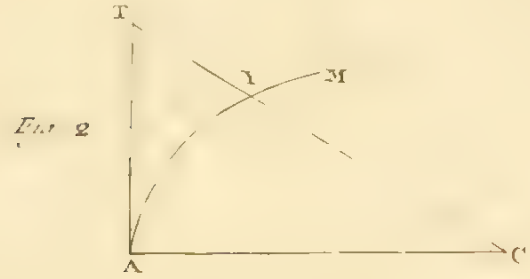
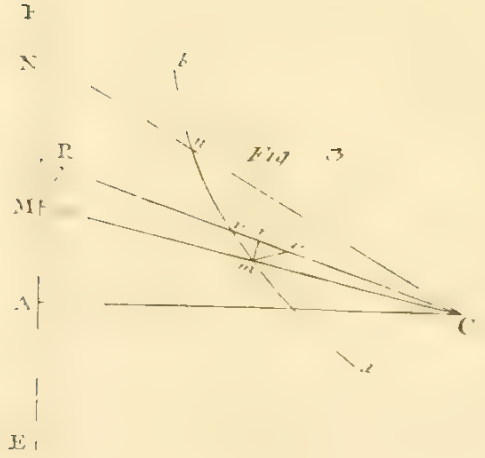


Fig. 2
T
Y
M
A
C


F
N
b
Fig. 3
R
M
A
C
E

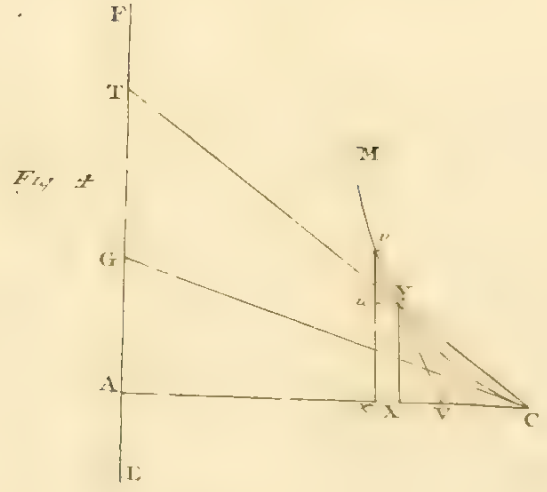
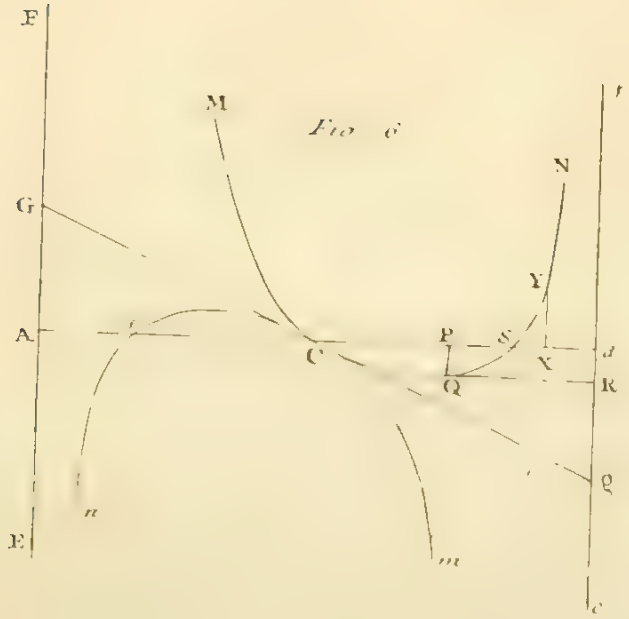


Fig. 4
F
T
M
G
A
X
V
C
E


F
M
Fig. 6
N
G
Y
A
C
P
S
X
d
Q
R
g
E
m
f
e

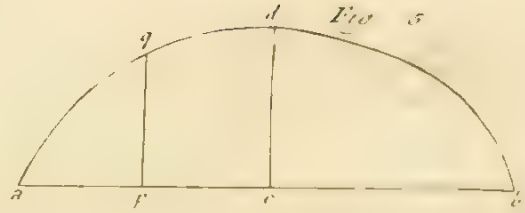


Fig. 5
d
g
a
f
e
b

Fig. 3.

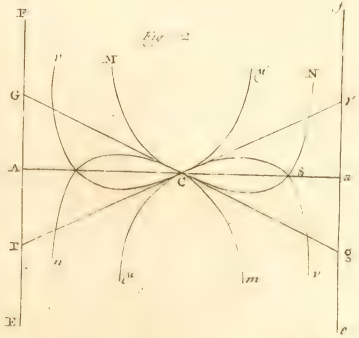
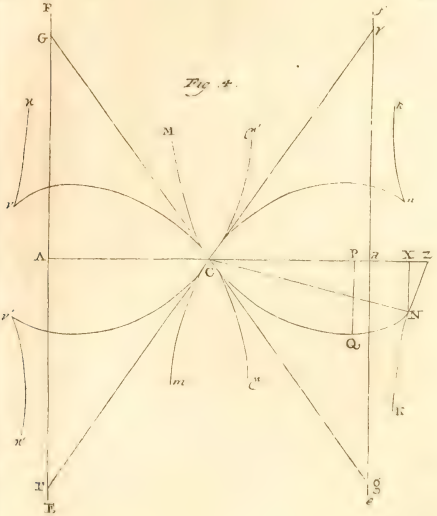


Fig. 4.



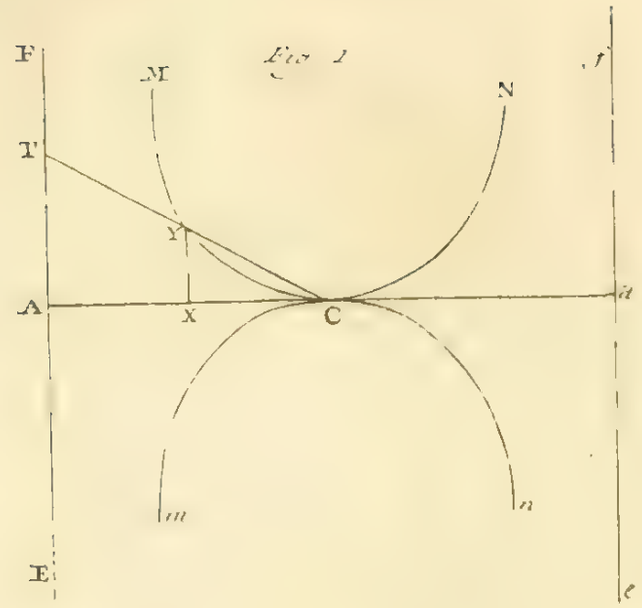


Fig. 1
F
M
N
f
T
Y
A
X
C
a
m
n
E
e

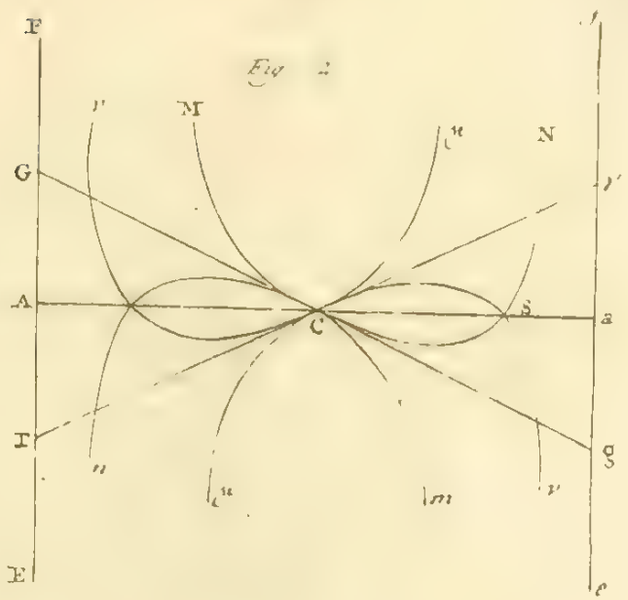


Fig. 2
F
M
N
G
A
C
a
T
g
E
e

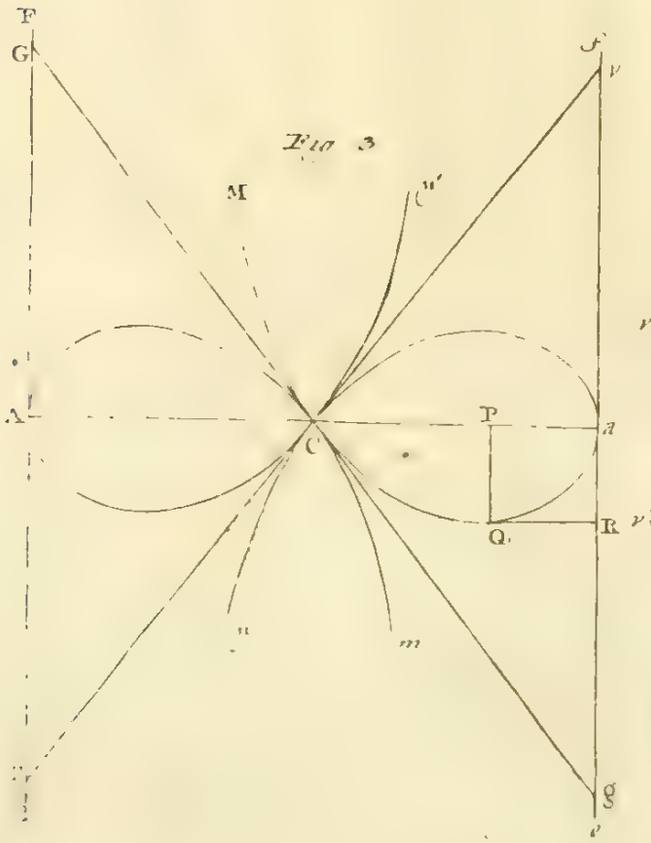


Fig. 3
F
G
M
A
C
P
a
Q
R
g
e

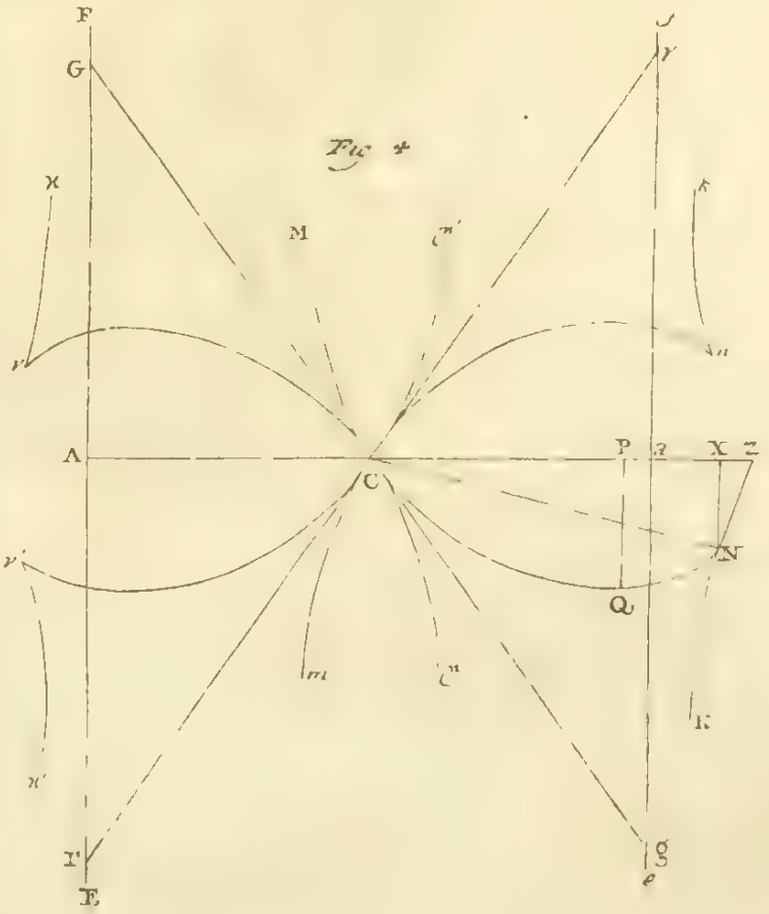


Fig. 4
F
G
M
A
C
P
Q
X
N
E
e

Fig 4

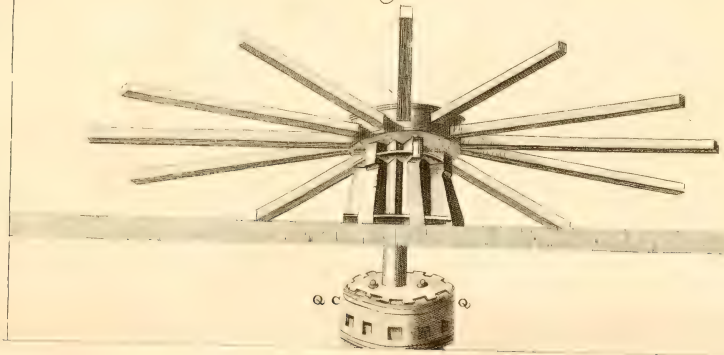


Fig. 4

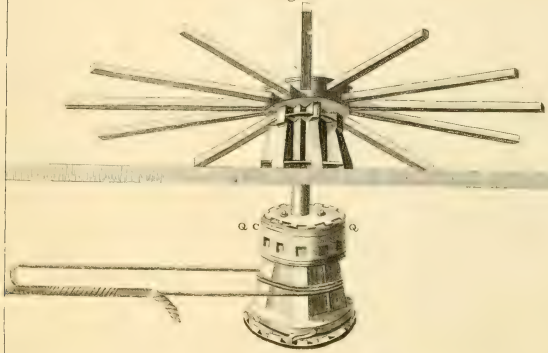
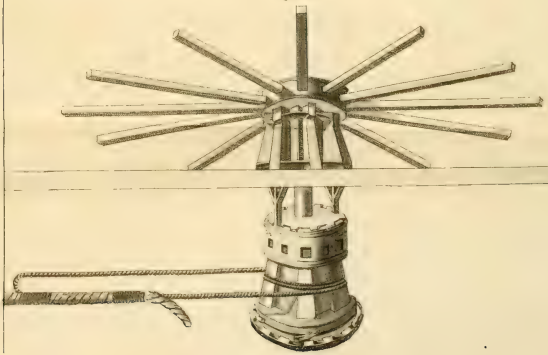
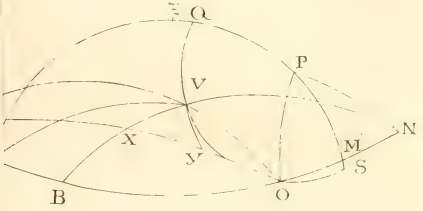
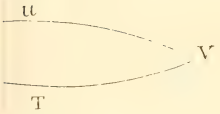


Fig. 5





5.



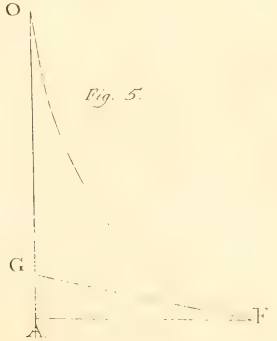


Fig. 5.

Fig. 1

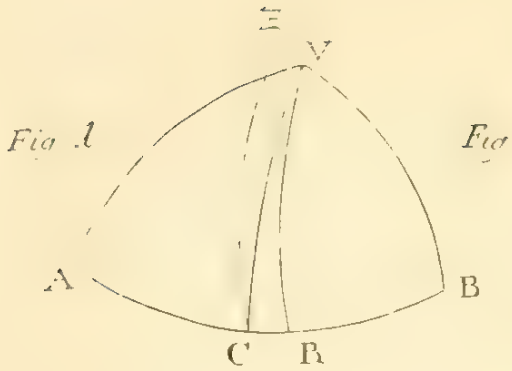


Fig. 2

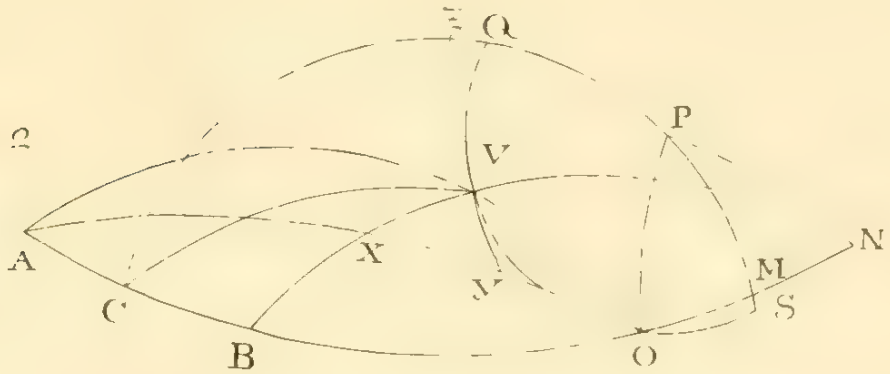


Fig. 3

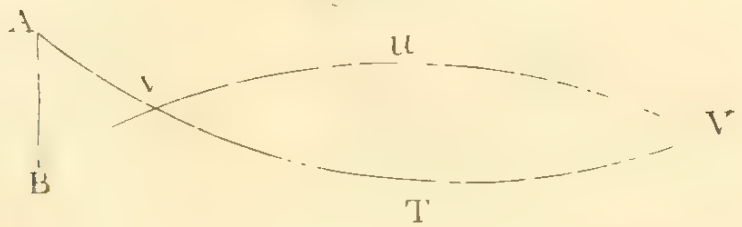


Fig. 4

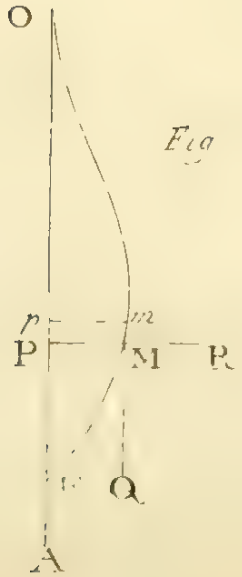


Fig. 5

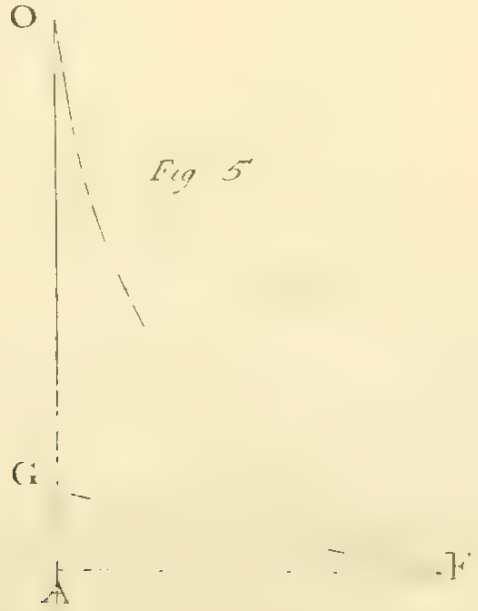


Fig. 2.

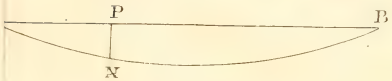


Fig. 1.

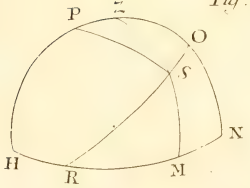


Fig. 3.

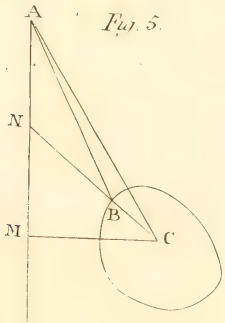


Fig 1

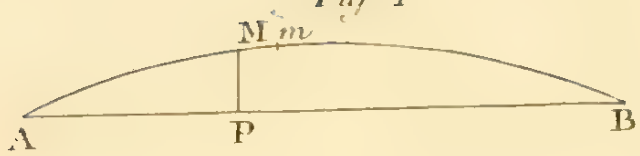
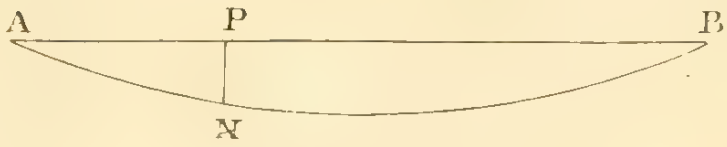


Fig. 2



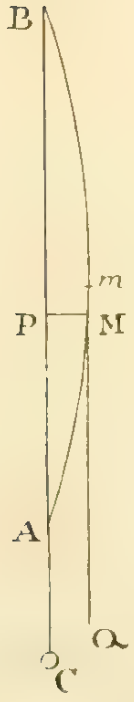


Fig 4

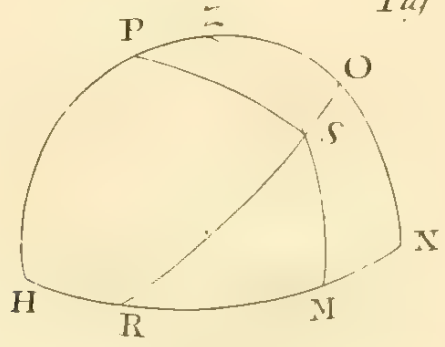
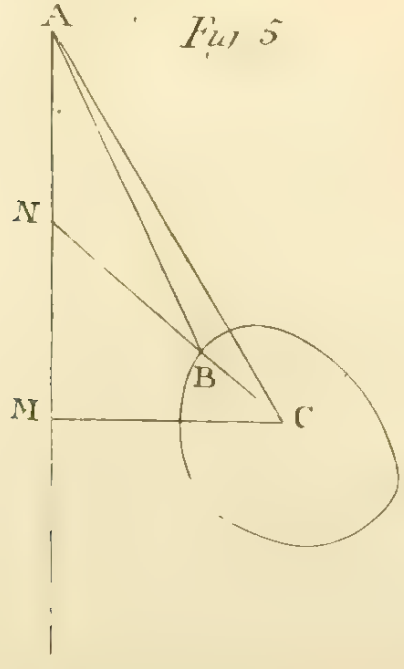
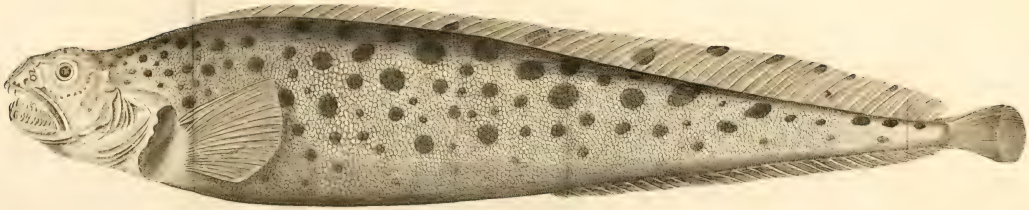
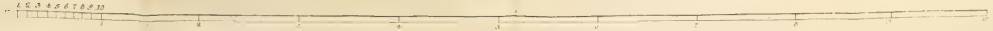


Fig 5







Le troisieme part du poisson

Fig 6

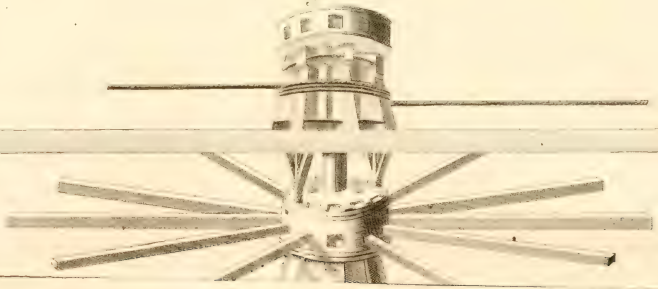


Fig. 6.

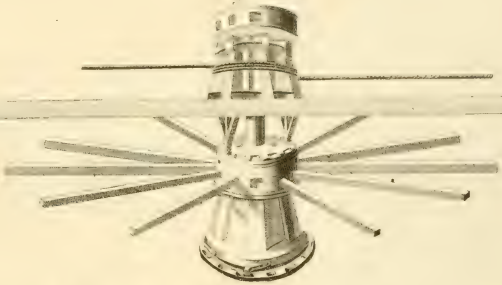


Fig. 7.

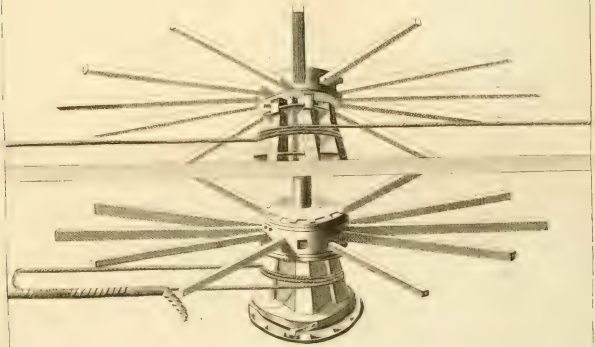


Fig. 8.

Fig. 2.

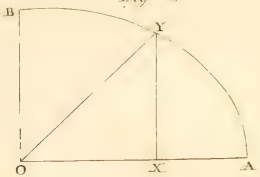


Fig. 4.

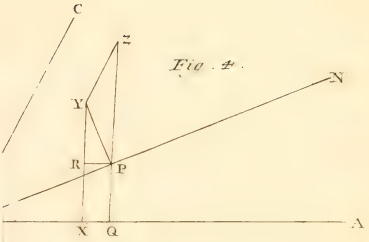
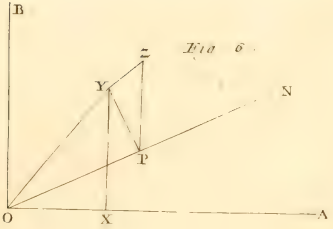


Fig. 6.



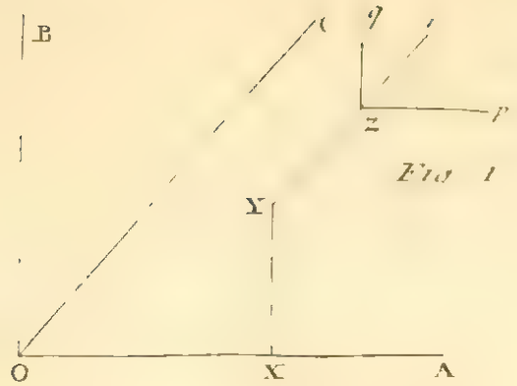


Fig. 1

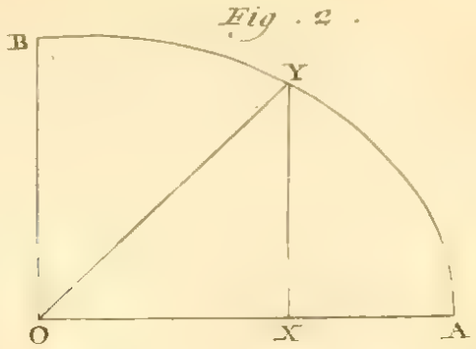


Fig. 2.

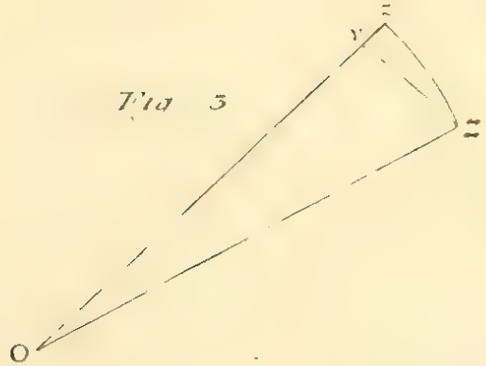


Fig. 3

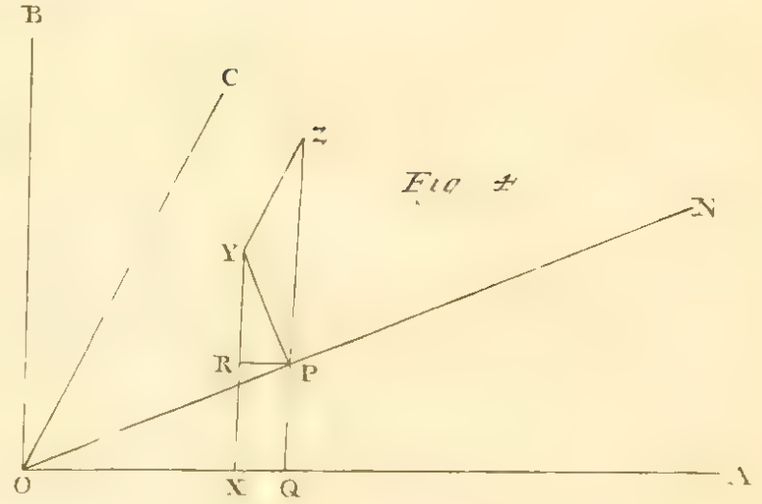


Fig. 4

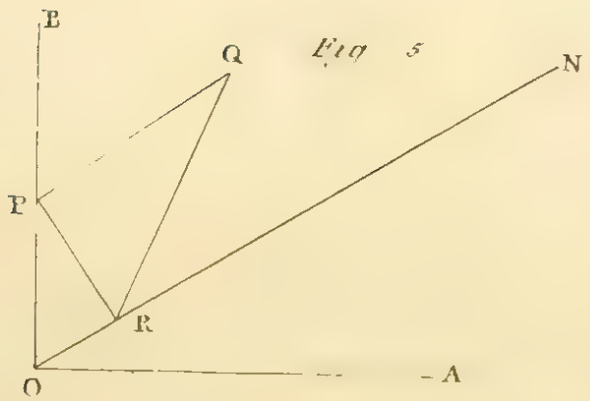


Fig. 5

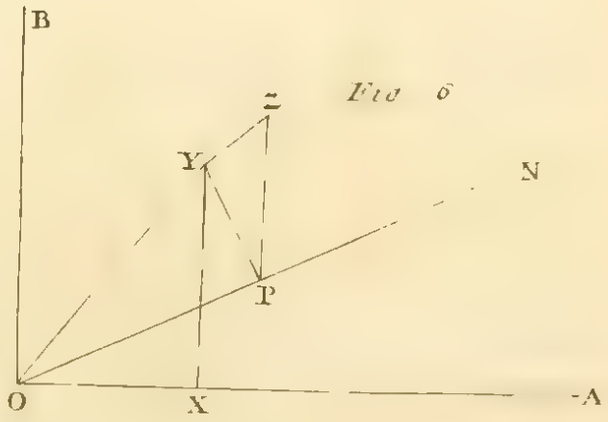


Fig. 6

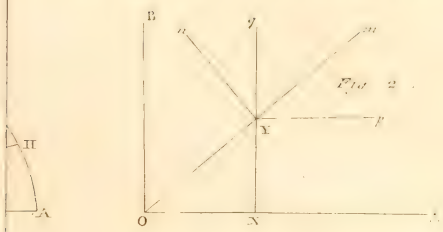


Fig 2

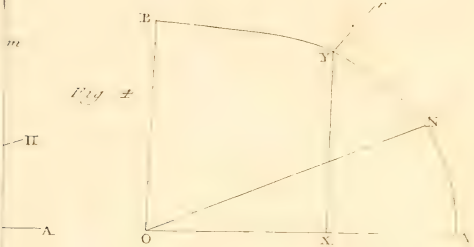


Fig 4

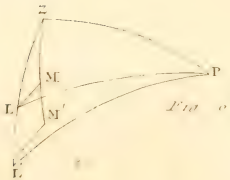
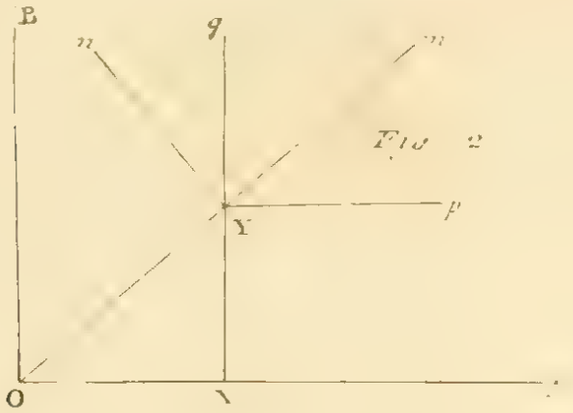
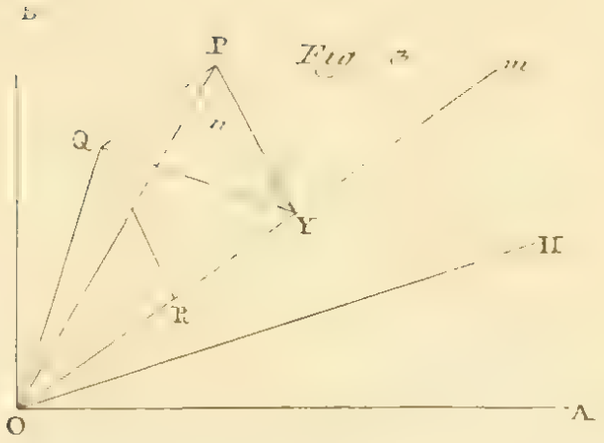
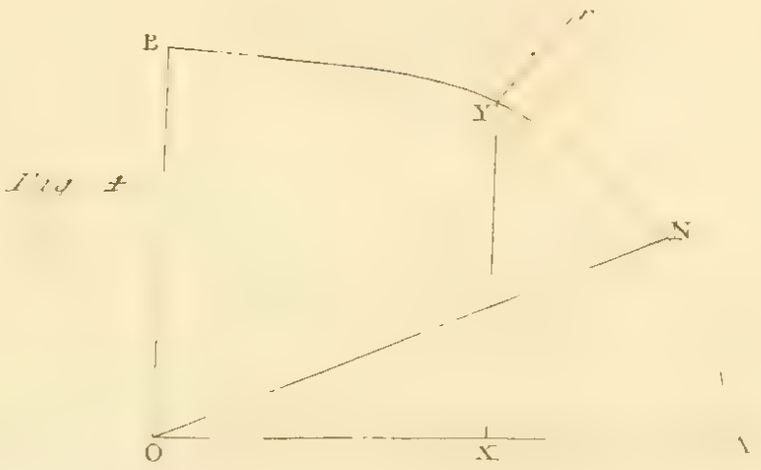


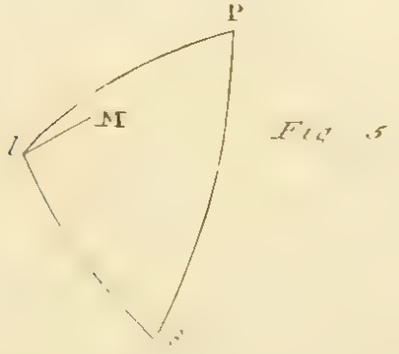
Fig 6

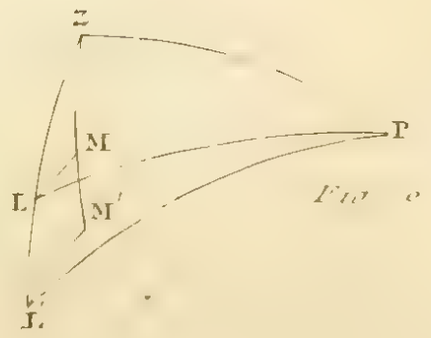
Fig 1
O
A
II


B
n
q
m
Fig 2
Y
p
O
A


B
P
Fig 3
m
n
Q
Y
II
R
O
A


B
Y
Fig 4
N
O
X


P
M
Fig 5


Z
M
P
L
M'
Fig 6

Acta Academiae scientiarum Petropolitanae 1781. I.

Wolff de ordine fibrarum muscularium cordis. Diss. II. de textu cartilagineo cordis. Sect. II. de textu cartilagineo ostii communis in basi cordis distributione. p. 211 c. tab. aen.

Georgi specimen observationum de ossibus pectoralibus Piscium. p. 278.

Verbasco nova hybrida auctore Koelreuter. p. 289.

Henrichsen Bartholinus Kursis Kupfertafeln Suecia auch. Zoologie. Felis Manuli nova species asiatica descripta a Pallas. t. VII. p. 278

Iris Güldenstaedtiana descripta a Lepechin. t. VIII

AMNH LIBRARY
100125005